

BULLETIN ASTRONOMIQUE

LA CONTRIBUTION D'HENRI POINCARÉ A LA THÉORIE DES MARÉES ⁽¹⁾

Par M. André GOUGENHEIM.

(Service Hydrographique de la Marine, Paris).

RÉSUMÉ. — Henri Poincaré a abordé la théorie des marées dans un petit nombre de Mémoires, mais il a obtenu des résultats très importants. Il a notamment montré que la théorie des équations intégrales de Fredholm permet d'arriver à la solution générale du problème des marées, tout au moins sur le plan théorique, car la mise en œuvre se heurte à des difficultés pratiques inextricables.

L'auteur situe les recherches de Poincaré par rapport aux travaux antérieurs, il en donne une brève analyse, ainsi que de celles de ses continuateurs immédiats.

ABSTRACT. — Though Henri Poincaré approached the theory of the tides in a few Memoirs only, he obtained very important results. He showed, particularly, that Fredholm's theory of integral equations leads to the general solution of the problem of the tides — this, at least, theoretically, as the application gives rise to innumerable difficulties.

After situating Poincaré's researches in relation to the works of his predecessors, the author gives an abstract of these researches and of those which followed directly.

ZUSAMMENFASSUNG. — Henri Poincaré hat sich bloss in einigen Abhandlungen mit der Gezeitentheorie beschäftigt, aber er hat sehr wichtige Resultate erzielt. Im besonderen hat er gezeigt, dass die Theorie

⁽¹⁾ Conférence prononcée à l'École Polytechnique le 22 juin 1950 (Conférences polytechniciennes) dans un cycle de conférences sur Henri Poincaré à l'occasion de la réédition des œuvres de Poincaré, édition du centenaire.

der Integralgleichungen von Fredholm zu einer allgemeinen Lösung des Gezeitenproblems führen können; theoretisch wenigstens, denn die Umsetzung in die Praxis stösst auf unentwirrbare Schwierigkeiten.

Der Verfasser reiht die Untersuchungen Poincarés in vorhergehende Arbeiten ein, er gibt davon eine kurze Zusammenfassung ebenso wie von denjenigen seiner direkten Fortsetzer.

Резюме. — Анри Пуанкаре коснулся теории приливов в небольшом количестве статей, но он сделал на основании их очень важные выводы. Он показал, что теория интегральных уравнений Фредгольма позволяет подойти к общему решению задачи о приливах, по крайней мере в теории, так как на практике приходится сталкиваться с непреодолимыми трудностями.

Автор рассматривает исследования Пуанкаре в связи с работами его предшественников, кратко их анализирует, так же как и работы его непосредственных продолжателей.

Lorsque, le 9 février 1900, Henri Poincaré reçut à Londres la médaille d'or de la Société Royale Astronomique, le Professeur Darwin, qui présidait la Société, tenant à exposer les raisons qui justifiaient cette distinction, prononça une allocution sur les recherches de Poincaré dans le domaine de la Mécanique céleste. Nous en retiendrons seulement l'admiration que l'orateur, spécialiste particulièrement éminent de ces questions, manifesta pour la puissance de Poincaré à saisir les principes abstraits, puissance dans laquelle il voyait la caractéristique intellectuelle du véritable mathématicien; le trait dominant du mode de travail d'Henri Poincaré lui paraissait consister en une extrême ampleur des généralisations, « au point, ajoutait-il, que le grand nombre des déductions possibles en est quelquefois troublant ».

Ces remarques ont été formulées alors que Poincaré n'avait encore produit qu'une partie de son immense œuvre scientifique, mais elles conviennent aussi bien aux travaux qu'il avait déjà effectués sur les marées, qu'aux recherches qu'il devait accomplir ultérieurement à leur sujet et elles expliquent pourquoi, malgré le petit nombre des écrits qu'il leur a consacrés, les résultats qu'il a atteints dans ce domaine présentent une importance considérable.

Les publications de Poincaré sur la théorie des marées sont en effet au nombre de quatre seulement :

— un mémoire *sur l'équilibre et les mouvements des mers*, paru en deux parties dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, en 1896;

LA CONTRIBUTION D'HENRI POINCARÉ A LA THÉORIE DES MARÉES. 3

— un article *sur un théorème général relatif aux marées*, paru dans le *Bulletin Astronomique* en 1903;

— une conférence *sur l'application de la théorie des équations intégrales au mouvement de la mer*, prononcée en allemand à l'Université de Göttingen, en avril 1909, et publiée à Leipzig en 1910.

— et enfin, le tome III des leçons de Mécanique céleste qu'il a professées à la Sorbonne en 1908-1909, volume consacré à la *théorie des marées*, rédigé par l'Ingénieur hydrographe Eugène Fichot et publié en 1910.

* * *

Avant d'exposer l'essentiel des travaux de Poincaré, il semble utile de préciser la nature du problème des marées et d'esquisser un bref résumé des travaux antérieurs.

Bien des gens s'imaginent, parce qu'on arrive aujourd'hui à prédire avec précision la marée en un point où le phénomène a été l'objet d'observations antérieures, que la question est entièrement résolue. Ce serait exact si l'on ne se bornait qu'à son aspect strictement utilitaire, qui offre d'ailleurs un intérêt incontestable, puisqu'il permet de donner satisfaction aux besoins de la navigation et des travaux publics. Mais la théorie des marées, telle que la conçoivent les astronomes, se place à un point de vue à la fois plus ambitieux et plus désintéressé; elle se propose de rechercher l'explication théorique des causes particulières qui font varier en chaque point la physionomie du phénomène, de découvrir comment il se propage d'un rivage à l'autre à travers l'océan et quelles influences viennent modifier son caractère. Malgré la masse d'observations accumulées depuis près de deux siècles, malgré les résultats théoriques considérables acquis durant la même période, on ne peut guère répondre à ces questions que par des conjectures, et nous sommes encore très loin du dernier stade de la connaissance de la marée, celui où l'on pourra exprimer quantitativement le phénomène en un point quelconque des océans sans avoir eu recours préalablement à l'observation.

C'est que la théorie des marées est un des chapitres les plus ardues de la Mécanique céleste. Henri Poincaré, toujours très concis cependant, a tenu à souligner l'extrême complication du problème dès la première ligne de chacun de ses Mémoires de 1896 et de 1903.

Certes, la cause des marées est simple, ou du moins, nous paraît telle, depuis que Newton, en 1687, rattacha le phénomène à son grand principe de la gravitation universelle et la situa dans l'attraction exercée par la Lune et par le Soleil sur les molécules des océans. Il est par suite aisé de former l'expression du potentiel générateur relatif à chacun des astres troublants; elle est d'ailleurs identiquement la même que celle

de la fonction perturbatrice dans le problème des trois corps, appliqué au cas où le centre de la Terre, celui de l'astre extérieur et la molécule liquide joueraient respectivement les rôles de planète principale, de planète troublante et de planète troublée. Le problème des marées présente donc une grande analogie avec celui des perturbations planétaires, tout au moins en ce qui concerne les causes, car les effets des forces perturbatrices sont totalement différents dans les deux cas, en raison des liaisons imposées aux molécules liquides, dont le mouvement est considérablement influencé par les forces de contact ou de pression.

Nous pressentons ainsi le rôle capital joué par l'hydrodynamique dans la théorie des marées, et le développement insuffisant de la mécanique des fluides nous explique les échecs de Newton d'abord, de Bernoulli ensuite, en 1740, dans leur essai d'explication complète du phénomène. C'est Laplace qui, en 1774, abordant le problème sous son aspect purement dynamique, ouvrit la voie à toutes les recherches ultérieures. Décomposant l'expression du potentiel générateur en termes sensiblement périodiques, il montra que la marée peut être considérée comme la superposition de trois sortes de marées partielles, marée à longue période, marée diurne et marée semi-diurne, dont les périodes sont celles des termes correspondants du potentiel, mais dont les amplitudes et les phases dépendent des conditions hydrauliques. En quelques pages d'une rare élégance, il établit l'équation des marées sous sa forme définitive et en déduisit d'importants théorèmes généraux. La prédiction des marées par l'analyse harmonique des observations résulte immédiatement des conceptions de Laplace, mais c'est aux travaux de Lord Kelvin en 1870, puis de Darwin, que la méthode doit d'avoir reçu sa forme définitive et d'être devenue un instrument d'une admirable souplesse et d'une généralité absolue.

Mais, en ce qui concerne la théorie des marées, l'intégration des équations du problème ne paraissait possible que dans des cas particuliers. La détermination des marées à longue période, qui relève d'une théorie statique, et surtout celle des marées à courte période, ou marées dynamiques, n'étaient que difficilement accessibles. Laplace traita complètement le cas d'un océan recouvrant entièrement la Terre lorsque la profondeur suit certaines lois simples; cette étude fut reprise par Lord Kelvin et surtout par l'astronome anglais Hough, directeur de l'Observatoire du Cap, qui, en 1897, détermina non seulement les oscillations contraintes de la masse liquide, mais aussi ses oscillations propres et mit ainsi très nettement en évidence l'influence de la résonance pour certaines valeurs de la profondeur. D'autres cas particuliers simples, presque aussi éloignés de la réalité que l'océan idéal recouvrant tout le globe, mais dans lesquels on pouvait également pousser les calculs jusqu'au bout, furent traités dans le courant du XIX^e siècle, notamment par Airy; il s'agit de

marées se produisant dans des canaux étroits et cette « canal theory » permet d'expliquer le comportement du phénomène dans certaines mers secondaires qu'on pouvait réduire schématiquement à des canaux.

D'autre part, dans les dernières années du siècle, l'hydrographe américain Harris, devançant la théorie, tenta une synthèse cohérente de toutes les observations alors connues. S'appuyant sur un certain nombre de lemmes établis empiriquement à l'aide de modèles expérimentaux, et attribuant un rôle essentiel à la résonance des bassins océaniques, il figura sur une carte la propagation des marées à travers toutes les mers du globe. Mais, quelle que soit la valeur de ce travail, il n'en constitue pas moins une explication *a posteriori*.

Tels étaient à peu près l'évolution et l'état de la question au moment où elle devint un des objets des recherches d'Henri Poincaré. Mais avant de montrer comment son génie parvint à triompher d'un problème qui semblait dépasser les forces de l'analyse, il nous faut encore préciser un peu l'aspect mathématique de ce problème.

Le développement du potentiel perturbateur en une série illimitée de termes rigoureusement périodiques dont les périodes dépendent uniquement d'éléments astronomiques invariables caractérisant les mouvements relatifs de la Lune et du Soleil, permet de considérer la marée comme la superposition d'une série égale d'oscillations partielles ayant chacune la périodicité du terme correspondant du potentiel. Pour étudier le phénomène, il suffit donc de déterminer chacun de ces mouvements partiels et d'en former la résultante, conformément au principe de la superposition des petits mouvements.

Analytiquement, on peut donc considérer que le problème sera résolu lorsqu'on aura traité le cas d'une quelconque de ces oscillations périodiques. Il se ramène ainsi à l'étude des petites oscillations d'un système mécanique autour de sa position d'équilibre sous l'influence d'une force perturbatrice périodique; mais, le nombre des points matériels du système étant infini, il faut recourir à des intégrations portant sur tout l'ensemble de la masse liquide; on voit apparaître ici toute la difficulté du problème des marées qui est beaucoup plus compliqué que la théorie des mouvements planétaires; dans celle-ci, en effet, on peut réduire tous les corps célestes à de simples points matériels, alors que, pour les marées, on doit nécessairement envisager un nombre pratiquement infini de molécules liquides, constituant une masse dont la configuration, déterminée par la forme arbitraire des continents et des bassins océaniques, échappe à toute formule représentative.

Une simplification s'introduit, cependant, du fait que la profondeur des océans n'est partout qu'une très faible fraction du rayon terrestre et même de la longueur d'onde, alors qu'au contraire, elle est partout très grande vis-à-vis de la dénivellation produite. Il s'ensuit que tous les

déplacements sont petits par rapport à la longueur d'onde, que le courant est faible, comparé à la célérité, et qu'enfin le déplacement vertical est petit eu égard au déplacement horizontal, lequel reste sensiblement le même pour toutes les molécules d'une même file verticale. L'accélération verticale étant alors négligeable, la pression en tout point de la masse liquide en mouvement se réduit à la pression statique et une des trois équations générales liant entre elles les trois composantes rectangulaires des vitesses (ou des déplacements) s'élimine aisément; il n'en subsiste que deux, contenant les composantes horizontales, et, pour connaître la surélévation due à la marée, il faut avoir recours à l'équation de continuité; ce fait montre d'ailleurs le rôle primordial joué par le courant dans le problème en cause, les dénivellations de la surface sont simplement déterminées par les variations de ce courant. Le processus du calcul conduit à une équation aux dérivées partielles qui fut établie pour la première fois par Laplace et à laquelle doit satisfaire sur toute la surface des océans une certaine fonction. Celle-ci, qui doit vérifier également les conditions aux limites, a été appelée fonction *cotidale* ⁽²⁾ par Eugène Fichot en 1923. Une fois cette fonction déterminée, les deux équations du mouvement font connaître, par des combinaisons linéaires de ses dérivées partielles, les deux composantes horizontales du courant, et l'équation de continuité fournit l'expression de la surélévation.

La fonction cotidale, ainsi d'ailleurs que la surélévation et les composantes du courant, sont des fonctions périodiques dont la période est celle du terme correspondant du potentiel et dont l'amplitude et la phase sont elles-mêmes des fonctions des coordonnées géographiques.

Diverses circonstances contribuent à compliquer sa détermination, notamment le fait que la déformation de la surface libre sous l'action des marées fait varier constamment en chaque point de cette surface la valeur de l'attraction exercée par l'ensemble de la partie liquide du globe terrestre; entre la surface d'équilibre et la surface troublée se trouve effectivement compris un volume d'eau ou d'air, improprement appelé *bourrelet* liquide et dont le potentiel newtonien en un point donné dépend de la dénivellation causée par la marée sur toute la surface du globe, c'est-à-dire précisément de la fonction cotidale cherchée; une nouvelle relation nécessairement assez complexe doit donc être posée, qui donne la valeur de ce potentiel en fonction des dénivellations; faire abstraction de cette influence du bourrelet reviendrait à négliger la densité de l'eau de mer vis-à-vis de la densité moyenne de la Terre, qui n'est guère que cinq fois et demie plus grande.

Pour établir une théorie complète, il faudrait même faire intervenir l'action du frottement, ainsi que les marées du noyau interne du globe

(²) De l'anglais « cotidal », formé avec « tide », marée.

et celles de l'atmosphère. Ces dernières ont certainement une influence négligeable; quant aux marées de l'écorce qu'on peut toujours considérer comme des marées statiques, elles sont jusqu'à présent très mal connues; en raison de leur existence, les marées océaniques que nous pouvons observer sont des marées relatives et n'ont pas un caractère absolu. Sur le frottement enfin, nous sommes également très mal renseignés, toutefois, il semble résulter des travaux de Hough qu'il est négligeable dans les bassins océaniques profonds; par contre, dans les régions peu profondes, de relief accidenté, cet élément est susceptible d'affecter la marée de manière très sensible.

Enfin, il nous faut mentionner un autre aspect sous lequel on peut aborder le problème des marées. Les systèmes thalassiques sur lesquels s'exerce la force perturbatrice sont le siège d'oscillations propres harmoniques qui se produisent lorsque, écartés de leur position d'équilibre par une cause quelconque, ils sont brusquement soustraits à l'action de toute force extérieure. Ces oscillations propres, qui dépendent uniquement de la constitution mécanique du système et des conditions initiales, s'amortissent sous l'effet du frottement. Au contraire, une force périodique extérieure impose au système des oscillations contraintes sur la période desquelles la constitution du système n'a aucune influence, mais, si cette période est très voisine de celle d'une des oscillations propres, il se produira un véritable phénomène de résonance avec renforcement de l'amplitude, alors que les forces extérieures dont la période ne s'accorde pas avec celle d'une oscillation propre n'entraîneront que de très faibles oscillations contraintes.

Ainsi, l'étude des marées se ramène à celle des oscillations propres d'un liquide contenu dans un vase tournant suffisamment grand pour qu'on puisse considérer la surface d'équilibre comme sphérique; les seuls termes du potentiel générateur à considérer pratiquement sont ceux dont la période est voisine de celle d'une oscillation propre. Du point de vue analytique, l'intégration des équations différentielles linéaires à second membre relatives aux oscillations contraintes se réduit à l'intégration des équations sans second membre dont une solution quelconque est une oscillation propre.

* * *

C'est sous cette dernière forme qu'Henri Poincaré a d'abord cherché à résoudre le problème des marées à courte période dans son Mémoire de 1896. Après avoir donné dans ce travail, pour les marées statiques, une élégante solution dont nous reparlerons plus loin, il étudie d'abord les oscillations propres d'un liquide enfermé dans un vase assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface d'équilibre, mais il distingue le cas où la profondeur est finie et celui où elle est infinie; il

aborde ensuite le cas où le vase est assez grand pour qu'on doive regarder la surface d'équilibre comme sphérique. Ce problème se ramène à celui des vibrations d'une membrane tendue, d'épaisseur et de tension variables, dont il avait déjà donné la solution ailleurs. Enfin, se rapprochant de la réalité, il tient compte de la rotation du globe et de la force centrifuge composée. Finalement, il montre que, dans tous les cas, la détermination des périodes des oscillations propres dans le vase tournant est ramenée à la recherche des maxima successifs du rapport de deux intégrales. Dans le cas simple initial, vase immobile et surface d'équilibre horizontale, ce rapport est celui de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle. L'objet de cette étude n'était pas d'arriver à une solution dans un cas concret idéal, mais de montrer comment les difficultés fondamentales pouvaient être surmontées par l'analyse mathématique. Commentant ce Mémoire dans l'allocution dont j'ai parlé au début, Darwin constate que « ici comme ailleurs, M. Poincaré nous entraîne bien au-delà du problème considéré et il est possible que les principes énoncés trouvent leur application dans d'autres domaines avant de la trouver dans celui des marées ».

Ce Mémoire date de 1896, mais en 1903, Ivar Fredholm, dans son remarquable Mémoire *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, mit au point la théorie des équations intégrales. Quelques années après, Henri Poincaré, maniant ce puissant instrument avec une rare maîtrise, montrait que le problème des marées dynamiques pouvait être entièrement résolu quelle que soit la loi de profondeur. Qu'il s'agisse d'oscillations propres ou d'oscillations contraintes, le problème est toujours ramené à la considération d'un système d'équations et de son déterminant. Lorsque, de l'étude d'un système mécanique constitué par un nombre fini de points discrets, on veut passer à celle d'un système naturel continu, on est amené à écrire un petit nombre d'équations différentielles devant servir à déterminer certaines fonctions inconnues. Mais, si l'on pouvait distinguer entre chacune des molécules dont est formé le volume des mers, on aurait un nombre extrêmement grand d'équations algébriques pour déterminer autant de constantes inconnues. On conçoit donc que l'intégration des équations différentielles puisse se faire par une généralisation judicieuse de la théorie des déterminants et des systèmes du premier degré. Or, telle est l'idée essentielle de la méthode des équations intégrales de Fredholm, dont la découverte a fait faire un progrès considérable à la théorie des équations aux dérivées partielles qu'on rencontre dans la plupart des problèmes de Physique mathématique.

La solution de Poincaré s'appuie sur le fait que l'équation de Fredholm permet de résoudre aisément le problème de Dirichlet dans le plan, en utilisant les propriétés du potentiel logarithmique; le problème se ramène alors à la détermination d'une fonction de Green, ordinaire ou généralisée. L'application aux marées résulte de ce que, si l'on fait de la sphère une

représentation conforme sur le plan, les équations du problème des marées conservent la même forme, mais sont satisfaites par un potentiel logarithmique au lieu de l'être, comme dans l'espace, par un potentiel newtonien.

Théoriquement, la méthode donne la solution du problème, même en tenant compte de l'attraction du bourrelet liquide; les séries obtenues convergent avec une très grande rapidité et la solution ne laisse rien à désirer à ce point de vue. Mais le calcul de chaque terme est loin d'être simple, malgré les améliorations qu'il est possible d'apporter et que Poincaré avait lui-même signalées; notamment, le mode opératoire qu'il a exposé procède par étapes et recourt à des fonctions de Green généralisées dont la détermination exige, pour chacune d'entre elles, la résolution d'une équation de Fredholm; en fait, il n'est pas indispensable d'opérer ainsi, on peut abrégier beaucoup les calculs en faisant tout à la fois. Néanmoins, ils restent très longs; il faut en effet introduire nécessairement la profondeur de la mer et la représenter par une fonction, d'où une complication extrême, qu'on n'éviterait qu'imparfaitement en adoptant une loi schématique grossière, et Poincaré se demandait si, dans ce cas, le travail considérable exigé serait en rapport avec un résultat forcément douteux. Même en admettant comme suffisamment vérifiée l'hypothèse formulée par Love en 1908 et d'après laquelle les contours des continents et les isobathes des océans sont approximativement représentables par des fonctions sphériques des trois premiers ordres, la formation de la résolvante ou des noyaux reitérés exigerait encore un labeur très important. Poincaré souhaitait en premier lieu que la méthode de Fredholm soit appliquée à retrouver certains cas particuliers déjà connus, mais, même pour obtenir ce critérium de la valeur de la méthode, une mise au point difficile lui paraissait nécessaire. Il espérait aussi qu'elle pourrait servir à démontrer rigoureusement certains théorèmes utiles concernant par exemple les mers communicantes, ou bien à vérifier la légitimité de certaines intuitions ayant servi de base à la méthode de Harris, ou encore à préciser l'action du frottement, par la comparaison des résultats théoriques avec l'observation des marées dans certaines aires bien délimitées.

Ainsi, Poincaré ne se faisait pas d'illusion sur le degré d'efficacité future de la méthode de Fredholm, mais celle-ci, par la perfection théorique qu'elle apporte à la solution générale du problème des marées, n'en constitue pas moins le plus grand progrès réalisé depuis Laplace dans la voie frayée par le génie de Newton.

La mort prématurée de Poincaré ne lui a malheureusement pas permis de rectifier diverses erreurs susceptibles de modifier certains points de sa pénétrante analyse, mais dont la révélation ne le troublait guère, assuré qu'il se savait d'y remédier toujours quand le besoin lui en apparaîtrait.

Jager en 1912 et l'Abbé Bertrand en 1923, dans deux thèses de mathématiques, ont précisé et complété sur certains points les résultats de Poincaré. Le second en particulier a traité les marées statiques par la méthode de Fredholm; il est facile dans ce cas de former l'équation de Fredholm fournissant la solution du problème et de l'étudier à l'aide des méthodes classiques résultant des travaux d'Émile Picard; le problème peut toujours être résolu dans ce cas, quelle que soit la forme des continents, mais la solution de l'Abbé Bertrand n'apporte aucun résultat nouveau, toutes ses conclusions avaient été déjà obtenues par Poincaré par une méthode plus directe, bien avant que fût fondée la théorie des équations intégrales.

Indépendamment de la méthode générale dont nous venons de parler, Poincaré a montré que le problème des marées pouvait se ramener à un problème de calcul des variations par une transformation appropriée des équations, auxquelles il devient alors possible d'appliquer la méthode de Ritz. Poincaré n'a pas vérifié que cette méthode, par laquelle son auteur avait traité avec succès le problème de Dirichlet et celui de l'élasticité, convenait également au problème des marées, mais son exactitude a été démontrée ultérieurement dans tous les cas.

En 1912, un jeune astronome français, Blondel, l'a utilisée pour étudier les marées de la mer Rouge, considérée comme un canal de profondeur et de largeur variables. Mais les résultats numériques auxquels il parvint s'accordaient fort mal avec les observations et il crut pouvoir attribuer la divergence au frottement; il se réservait de reprendre son étude à ce point de vue quand une mort glorieuse l'enleva à la Science en 1916.

Reprenant, en 1930, les laborieux calculs auxquels donne lieu la méthode de Ritz, M^{me} Chandon trouva dans la thèse de Blondel deux erreurs numériques qui expliquaient la plus grande part du désaccord; une fois ces erreurs rectifiées, les résultats cadraient beaucoup mieux avec la réalité; leur discussion la conduisit même à penser qu'une amélioration encore plus complète serait intervenue, si elle avait pris comme point de départ les observations de marée en un point plus septentrional que l'île de Périm, qui était la base choisie par Blondel et au voisinage de laquelle la profondeur de la mer était connue de façon très lacunaire. Traitant ensuite les marées de la mer Rouge par les méthodes simplifiées de la théorie des canaux et partant des observations faites à l'extrémité nord de la mer, M^{me} Chandon obtint une concordance très satisfaisante avec les valeurs observées, d'un bout à l'autre de la mer Rouge, d'où il résulte que le frottement ne paraît avoir aucune influence dans cette mer, ni même dans le golfe de Suez, beaucoup moins profond.

Ces deux procédés d'intégration des équations du problème des marées constituent évidemment la partie prépondérante de la contribution qu'Henri Poincaré a apportée à l'étude du phénomène, ils rejettent un

peu dans l'ombre ses autres travaux sur la question, mais ceux-ci sont loin d'être négligeables et Eugène Fichot qui a rédigé en vue de leur publication les leçons magistrales professées par Poincaré à la Sorbonne, les considérait comme « une source intarissable d'investigations nouvelles ». Nous allons voir rapidement les principaux résultats indiqués par Poincaré.

Nous avons déjà fait allusion au problème des marées statiques qui concerne les oscillations à longue période et que Poincaré a traité dans son Mémoire de 1896. C'est Bernoulli qui, en 1740, établit pour la première fois la théorie dite de l'équilibre, ou théorie statique des marées, dans le cas d'un globe entièrement recouvert d'eau et en négligeant l'influence du bourrelet. Laplace n'apporta aucun perfectionnement notable à cette solution. Longtemps après seulement, Thomson et Tait parvinrent à tenir compte de la présence des continents par l'application d'une correction très simple, mais en négligeant toujours l'attraction du bourrelet. Poincaré reprit la question dans son ensemble et résolut entièrement la détermination de la marée statique, compte tenu à la fois du bourrelet liquide et de l'influence des continents; il fit appel à cet effet à certaines fonctions qu'il appela fondamentales et dont les propriétés rappellent celles des fonctions sphériques; ces fonctions fondamentales dépendent de la forme des continents et se réduisent aux fonctions sphériques lorsqu'on considère une mer recouvrant tout le globe. Les résultats obtenus sont très complexes et, là aussi, se prêteraient difficilement à une application numérique, qui d'ailleurs n'a pas encore été tentée. Cependant, Poincaré a pu montrer, dans son étude, que pour certaines formes des continents la théorie de l'équilibre corrigée, de Thomson et Tait, pourrait conduire à des résultats plus éloignés de la réalité que la simple application de la théorie newtonienne de l'équilibre au cas d'une mer recouvrant le globe entier. « Il est probable qu'il n'en est pas ainsi, ajoute-t-il, mais pour le vérifier il faudrait faire le calcul complet, et, à cause de la forme capricieuse des continents, ce calcul, même réduit à une approximation grossière, serait absolument inextricable ».

Si les méthodes d'intégration indiquées par Poincaré permettent théoriquement de former dans tous les cas la fonction cotidale, leur mise en œuvre est, dans l'état actuel de nos moyens, absolument impraticable; aussi l'étude des cas particuliers, même très éloignés de la réalité, mais permettant l'intégration complète des équations du problème, conserve-t-elle tout son intérêt. Les canaux étroits, comme nous l'avons vu, sont un de ces cas favorables. Mais si, pour de tels canaux, il est légitime de négliger la force centrifuge composée, cette simplification n'est plus permise pour une mer littorale, comme la Manche ou l'Adriatique. On peut bien assimiler une mer littorale à un canal régulier, de profondeur et de largeur constantes, et ouvert à son extrémité sur l'océan, mais la

prise en considération de la rotation terrestre altère profondément la physionomie du phénomène. Les équations du problème admettent alors deux solutions, dont l'une a été signalée en 1880 par Lord Kelvin; l'observation montre que les ondes qui lui correspondent sont de beaucoup les plus importantes. La deuxième solution a été indiquée, et très sommairement exposée, par Henri Poincaré dans ses leçons sur la théorie des marées. Eugène Fichot l'a développée dès 1912 et a été conduit à envisager deux types d'ondes qu'il a appelées ondes de Poincaré de première et de deuxième espèces. Dans les ondes de Kelvin, les molécules possèdent en plan un mouvement rectiligne parallèle aux rives du canal et la célérité de l'onde ne dépend que de la profondeur; dans les ondes de Poincaré, les molécules décrivent des trajectoires elliptiques et la célérité est fonction à la fois de la profondeur et de la largeur du canal. On rencontre un phénomène analogue dans la propagation guidée des ondes électromagnétiques qui choisissent leur vitesse d'après les dimensions du guide.

L'interférence de deux systèmes d'ondes entraîne, pour celles de Poincaré comme pour celles de Kelvin, la formation de systèmes amphidromiques, c'est-à-dire que la surface de la mer présente des nœuds de vibration autour desquels la marée semble pivoter. Mais, à la superposition de deux ondes de Kelvin, il correspond un chapelet de nœuds parallèle aux rives du canal, tandis qu'avec les ondes de Poincaré de première espèce, la surface du canal se couvre d'un quadrillage de nœuds. Les ondes de deuxième espèce, dont la célérité est imaginaire, conduisent à une amphidromie de Kelvin, mais tournée de 90° et dont par suite les nœuds sont alignés sur une perpendiculaire à l'axe du canal.

La solution de Poincaré a été retrouvée en Angleterre peu d'années après et, vraisemblablement de façon indépendante, par J. Proudman, ainsi que par G. Taylor qui, étudiant en 1922, la réflexion d'une onde de Kelvin à l'extrémité d'un canal fermé, fut amené à considérer le mouvement déterminé par la réflexion comme la superposition à un système de Kelvin d'une série d'oscillations d'un type particulier, qui sont précisément les ondes trouvées par Poincaré. Ce dernier avait déjà remarqué lui-même que la réflexion totale d'une onde sur une paroi ne saurait être parfaitement régulière si l'on tient compte de la force centrifuge composée, à cause de la dénivellation qu'elle crée entre les deux rives; cependant dans un canal étroit, cette dénivellation est faible et, à son avis, le changement de sens par suite de la réflexion devait simplement produire un léger clapotis se superposant à l'onde stationnaire.

Dans un Mémoire, publié en 1903 dans le *Bulletin Astronomique*, Poincaré démontra l'existence d'une relation entre le potentiel perturbateur et la marée; elle constitue un des rares théorèmes généraux relatifs aux marées et entraîne une conséquence très importante concernant le sens de propagation des ondes engendrées par un terme isochrone du

potentiel perturbateur dans un domaine océanique quelconque. Poincaré a montré que, en dehors des conditions aux limites, cette propagation est astreinte à certaines conditions imposées par les équations indéfinies du problème et il a pu établir que les ondes progressives vont toujours des points où la marée est en retard vers les points où elle est en avance, résultat qui peut paraître paradoxal *a priori*, mais qui découle en fait directement du principe des forces vives. C'est un renseignement très précieux pour l'étude de la propagation de la marée dans un domaine océanique car, comme on ne dispose d'observations que sur les côtes, il faut recourir à la théorie et celle-ci est donc en mesure de nous satisfaire sur un point.

De ce théorème, Poincaré tira une preuve de plus de l'impossibilité de l'hypothèse de Whewell qui, ainsi qu'on le sait, supposait que les marées prenaient naissance dans les mers antarctiques et se propageaient vers le Nord sous forme d'ondes dérivées, en suivant les deux océans Atlantique et Pacifique, à la façon d'une vague progressant dans un canal, jusqu'à converger enfin vers les mers arctiques. Pour justifier cette théorie, il faudrait en effet attribuer au frottement un effet considérable capable de détruire les marées pendant la durée d'une période, soit 12 h pour les marées semi-diurnes, alors que, d'après les calculs de Hough, il faudrait environ 20 ans pour réduire l'amplitude des oscillations à une fraction $\frac{1}{e}$ de sa valeur initiale.

Nous avons cité au début de cet exposé la synthèse par laquelle Rollin A. Harris a tenté de relier d'une manière plausible l'ensemble des observations alors connues; sa manière de voir s'écarte beaucoup de celle de Whewell et ne se heurte pas, dans ses principes généraux, aux mêmes objections essentielles. Le travail de Harris a vivement intéressé Henri Poincaré qui l'a examiné minutieusement et en a fait une critique pénétrante dans ses leçons en Sorbonne, redressant quelques résultats erronés, restreignant quelques affirmations trop générales, mais concluant que la théorie définitive devra emprunter à celle de Harris une part notable de ses grandes lignes.

L'idée directrice de Harris était de chercher dans l'ensemble des mers des systèmes en résonance avec les périodes de chacune des différentes marées partielles, diurnes ou semi-diurnes, lunaires ou solaires. Il était donc nécessaire de savoir évaluer la période d'oscillation propre d'un bassin ayant des limites plus ou moins imposées. A cet effet Harris fut amené à faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices : il négligea la sphéricité et la force centrifuge composée, il assimila le bassin considéré à une figure géométrique très simple, il en supposa la profondeur constante et ne tint pas compte de ce que ses limites étaient souvent mal définies, percées d'ouvertures, etc. Pour obtenir la période d'oscillation propre,

il appliqua divers lemmes empruntés à la théorie, à l'expérimentation, ou même à l'observation dans la nature, lemmes qui indiquent notamment dans quel sens telle ou telle circonstance fait varier la période. Ces lemmes furent étudiés par Poincaré qui put démontrer analytiquement deux des plus importants, qu'Harris avait établis à l'aide d'expériences effectuées sur des bassins artificiels; il s'agit de l'augmentation de la période d'oscillation propre d'un bassin rectangulaire de profondeur constante lorsqu'on introduit soit un rétrécissement, soit un seuil en son milieu. Mais la plupart des lemmes de Harris conservent une origine empirique et Poincaré pensait qu'un premier parti à tirer de la méthode de Fredholm serait de leur donner un fondement plus solide, notamment d'évaluer l'influence de la force de Coriolis dans des cas simples, de préciser dans quelle mesure il est légitime de traiter isolément, comme des mers fermées, les bassins délimités par Harris et de déterminer le résultat de la superposition de plusieurs bassins.

Il existe encore un point sur lequel une démonstration de Poincaré est venue jeter la lumière; il s'agit du retard que prend la rotation terrestre sous l'effet des marées. Le ralentissement, mis en évidence depuis longtemps par les observations astronomiques, peut s'expliquer par l'action des marées, dont le frottement absorbe nécessairement une énergie qui ne saurait être empruntée qu'à la force vive de rotation du globe. Mais le mécanisme en est présenté généralement de façon fautive en attribuant au frottement le retard de la marée sur le passage de la Lune au méridien; la protubérance des eaux soulevées n'étant pas dans le même méridien que la Lune, la résultante de l'attraction lunaire sur ce bourrelet ne passe pas par l'axe de la Terre et forme ainsi un couple retardateur. Or, on sait que le frottement n'est nullement la cause principale de ce décalage et que l'asymétrie de la protubérance par rapport au rayon vecteur de la Lune existerait même en l'absence de toute viscosité. Faut-il donc en conclure, en dépit du principe de la conservation de l'énergie, que l'action lunaire tendrait à faire varier la durée de la rotation terrestre? A cette question, Poincaré a répondu négativement en démontrant directement que l'action de la Lune sur les eaux soulevées a toujours sa valeur moyenne nulle, quelle que soit la configuration des océans, de sorte que, s'il n'y avait pas de frottement, il ne pourrait y avoir aucun changement dans la durée de rotation de la Terre; un ralentissement ne peut résulter que de la portion du décalage du bourrelet attribuable à l'action du frottement.

Citons enfin, pour terminer une énumération déjà longue, l'intervention d'Henri Poincaré dans l'étude des marées fluviales et du mascaret, laquelle diffère en bien des points de celle des marées océaniques en raison de la diminution extrême de la profondeur, qui exclut le recours à cer-

aines hypothèses simplificatrices. De Saint-Venant, en 1870-1871, avait établi les équations du mouvement non permanent de l'eau dans les canaux, ainsi qu'une méthode d'intégration pour une loi particulière de la vitesse du courant. En 1898, Maurice Lévy reprenant la question à l'aide des variables de Lagrange, était arrivé à des résultats analogues par des approximations successives. Partant des équations de Maurice Lévy et de la solution de Saint-Venant, Poincaré applique au problème la méthode d'intégration par les caractéristiques et le résout ainsi pour un fleuve de profondeur et de section constantes, lorsqu'on néglige le frottement. Cette méthode qu'il a rapidement esquissée, mais qui permet d'étudier la formation du mascaret, a été reprise tout récemment aux États-Unis dans un cas beaucoup plus général.

* * *

Il serait certainement possible, en examinant point par point les leçons de Poincaré sur la théorie des marées, de trouver encore dans cet Ouvrage, si concis et pourtant si substantiel, mainte vue originale et féconde sur les questions les plus diverses soulevées par l'étude du mouvement des mers. Mais les résultats que nous avons exposés sont de beaucoup les plus essentiels et ils constituent un magnifique apport à la théorie des marées. En dehors de leur valeur intrinsèque, ils ont une importance considérable du fait que les solutions de Poincaré, obtenues, non par la finesse ou l'ingéniosité, mais en dominant les problèmes par la puissance et la pénétration de son analyse, sont susceptibles d'une généralité étendue et permettront de traiter d'innombrables cas particuliers. Cependant le travail d'un maître tel que Poincaré ne portera tous ses fruits que quand maints disciples se seront engagés dans les larges percées, ouvertes par son génie à travers des domaines aux trois-quarts vierges. Malheureusement, en dehors des beaux travaux que son plus fidèle disciple, Eugène Fichot, a poursuivis pendant trente ans, jusqu'à sa mort, en dehors également de ceux de Marcel Brillouin, le bref enseignement de Poincaré n'a suscité en France que quatre ou cinq thèses de mathématiques et l'impulsion qu'il avait donnée s'est peu à peu amortie. Certes les ingénieurs du Service Hydrographique continuent à s'intéresser aux marées, mais ils ont essentiellement la responsabilité de leur prédiction pour tous les territoires français, et les quelques recherches, que leurs multiples occupations professionnelles leur laissent le loisir d'effectuer sur les marées, sont plutôt orientées dans une direction utilitaire que vers la théorie pure. A l'étranger, la situation est un peu meilleure à ce point de vue, singulièrement en Angleterre, où le « Tidal Institute » de Liverpool est arrivé, peu avant la guerre, à de très beaux résultats théoriques. On trouvera une preuve du peu d'intérêt porté jusque très récemment en France aux questions de marées, dans le fait que, parmi

tous les discours prononcés l'année dernière, à l'occasion du deuxième centenaire de la naissance de Laplace et évoquant les divers aspects de son œuvre scientifique, aucun ne fut consacré spécialement à ses mémorables recherches sur les marées et je crois pouvoir affirmer que de nombreux marins et tous les hydrographes du monde ont péniblement ressenti cette omission.

Cependant un revirement paraît se produire; à la suite d'une demande adressée il y a quelques mois au Ministère de l'Éducation Nationale par le Secrétaire d'État à la Marine, l'Université de Paris vient d'organiser, dans le cadre de l'Institut de Physique du Globe et sur une base encore modeste, un enseignement supérieur de l'océanographie physique, dans lequel une place relativement importante sera faite à l'étude du mouvement des mers.

Souhaitons que ce cours devienne l'embryon d'un enseignement plus développé, s'adressant à des étudiants pourvus d'une culture mathématique étendue, dont certains pourront s'intéresser utilement à la théorie des marées et faire fructifier le domaine défriché par Poincaré. Formons aussi le vœu que, parallèlement, la Marine Nationale puisse consacrer quelques moyens à résoudre le difficile problème posé par l'observation de la marée loin des côtes; une telle observation est certes sans grand intérêt pratique, mais elle est seule capable de fournir des vérifications expérimentales à des recherches théoriques qui, sans cette confirmation, risqueraient de conserver un caractère purement spéculatif.

(Manuscrit reçu le 25 février 1956).

