1955ZA.....38...95H

Zeitschrift für Astrophysik, Bd. 38. S. 95—109 (1955).

# Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie. I*.

Von

O. Heckmann und E. Schücking.

Mit 3 Textabbildungen in 8 Einzeldarstellungen.

*(Eingegangen am 2. August 1955.)*

1. Im Rahmen der Newtonschen Mechanik und Gravitationslehre werden unendlich ausgedehnte homogene Verteilungen von inkohärenter Materie (Substrat) bei beliebigen linearen Strömungsfeldern $v_i = a_{ik}(t)\, x_k$ untersucht. Die allgemeine Lösungstheorie wird in den Gleichungen (1.28), (1.29) und (1.30) gegeben.

2. Jeder im Substrat mitschwimmende Beobachter kann die Newtonsche Mechanik unbeschränkt anwenden, obwohl irgendzwei von ihnen relativ zueinander beschleunigt sind.

3. Zwei spezielle Lösungen des in 1. aufgerollten allgemeinen Problems werden näher untersucht:

a) eine statische bei Vorhandensein einer allgemeinen Rotation des Substrats. Diese steht in Analogie zu der Gödelschen Lösung der Allgemeinen Relativitätstheorie;

b) ein Weltmodell, bei welchem eine allgemeine Rotation einer isotropen Expansion überlagert ist. — Dieser Fall ist wichtig, weil er im Gegensatz zu den bisher bekannt gewordenen Weltmodellen der Newtonschen und der relativistischen Kosmologie eine unendliche Konzentration der Materie nicht mehr erlaubt.

## *Einleitung.*

Im Jahre 1949 wurde von K. Gödel [2] ein allgemein-relativistisches statisches Weltmodell angegeben, in welchem das homogene Substrat relativ zum Trägheitskompaß gleichförmig rotiert. Die enge Analogie zwischen den Friedmannschen Weltmodellen der Allgemeinen Relativitätstheorie und den von Milne und McCrea [5] angegebenen homogen-isotropen Modellen der Newtonschen Kosmologie ließ vermuten, daß sich auch ein Newtonsches Analogon des Gödelschen Modells angeben läßt.

Die folgende Mitteilung gibt Ergebnisse, die diese Vermutung bestätigen. Darüber hinaus wird ein im Rahmen der Newtonschen Kosmologie konstruiertes Weltmodell angegeben, in dem die homogen verteilte Materie rotiert bei gleichzeitiger isotroper Expansion. Das Analogon zu dieser in der Newtonschen Theorie sehr natürlichen und im Hinblick auf die Kosmologie sehr erwünschten Verallgemeinerung ist im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie bisher nicht bekannt geworden.

---

* Mitteilungen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf, Bd. 23, Nr. 251.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



In dieser Arbeit diskutieren wir ferner einige neuerdings aufgetauchte Unklarheiten, die die Interpretation der NEWTONschen Kosmologie betreffen [1, 4, 6]. In der Beantwortung der Frage, inwieweit die NEWTONsche Kosmologie einen legitimen Platz in der klassischen Mechanik einnimmt, kommen wir zum Ergebnis, daß es zweckmäßig ist, gewisse übliche — aber nicht notwendige — Interpretationen der klassischen Mechanik zu verlassen und zu solchen überzugehen, die der Allgemeinen Relativitätstheorie nahekommen.

*Bezeichnungen.*

In der NEWTONschen Kosmologie werden nur cartesische Koordinatensysteme verwendet. Lateinische Indizes zur Bezeichnung von Tensorkomponenten laufen von 1 bis 3. Über doppelt auftretende Indizes ist stets zu summieren. $\delta_{ik}$ ist das Kroneckersymbol. Partielle Differentiation wird durch einen unten rechts beigefügten Strich mit nachfolgendem Index bezeichnet. Für die Zeit wird der Index „0“ verwandt, also

$$v_{i|0} = \frac{\partial v_i(x_j, t)}{\partial t}, \qquad v_{i|k} = \frac{\partial v_i(x_j, t)}{\partial x_k}.$$

Mit $\varrho$ bezeichnen wir die Materiedichte, mit $P$ den isotropen Druck, mit $v_i$ den Geschwindigkeitsvektor des Strömungsfeldes, mit $\Phi$ das Gravitationspotential, mit $G$ die NEWTONsche Gravitationskonstante und mit $\Lambda$ das kosmologische Glied. Wenn später Funktionen, die nur von der Zeit abhängen, auftauchen, so wird ihre Ableitung durch einen Punkt (z. B. $\dot{\varrho}$) bezeichnet.

§ 1.

Die Grundgleichungen der NEWTONschen Kosmologie lassen sich folgendermaßen gewinnen: $J$ sei ein Intertialsystem. In ihm gelten für das als ideale Flüssigkeit gedachte Substrat die Gleichungen

$$\varrho_{|0} + (\varrho\, v_k)_{|k} = 0, \tag{1.1}$$

$$v_{i|0} + v_k\, v_{i|k} = -\Phi_{|i} - \frac{1}{\varrho} P_{|i}, \tag{1.2}$$

$$\Phi_{|i|i} + \Lambda = 4\pi G\, \varrho. \tag{1.3}$$

Gl. (1.1) ist die Kontinuitätsgleichung. (1.2) setzt die links stehende Beschleunigung eines Substratelementes der rechts stehenden durch die Materiedichte dividierten Volumkraftdichte gleich. In dieser Gleichung ist die Proportionalität von träger und schwerer Masse berücksichtigt. Infolge der Division durch $\varrho$ haben wir ein für allemal die Betrachtung leerer Welten ausgeschlossen. Es könnte sich lohnen, insbesondere in der Nähe von Zuständen hoher Dichte, die Gl. (1.2) durch Reibungsglieder zu ergänzen, was hier aber absichtlich unterlassen wurde. (1.3)

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



ist die durch das kosmologische Glied modifizierte POISSONsche Gleichung. Die Gl. (1.1), (1.2) und (1.3) haben streng differentiellen und lokalen Charakter.

Uns interessieren hier Lösungen des Systems (1.1), (1.2), (1.3), die durch die folgenden Forderungen

$$v_i = a_{ik}(t)\, x_k + b_i(t)\,, \tag{1.4}$$

$$\varrho = \varrho(t)\,, \qquad P = P(t) \tag{1.5}$$

eingeschränkt sind. $b_i$ ist der Geschwindigkeitsvektor des jeweils im Koordinatenursprung befindlichen Substratelements. Die Forderung $b_i = 0$ würde bedeuten, daß ein Substratelement — nämlich das im Ursprung liegende — ein Intertialsystem mitführt. Wir setzen also nicht voraus, daß ein mitschwimmender Beobachter ein Trägheitssystem besitzt. Für das Potential fordern wir keine einschränkenden Bedingungen.

Setzt man (1.4) und (1.5) in (1.1) bis (1.3) ein, erhält am

$$\dot\varrho + a_{kk} \cdot \varrho = 0\,, \tag{1.6}$$

$$(\dot a_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, x_k + \dot b_i + a_{ik}\, b_k = -\,\Phi_{|i}\,, \tag{1.7}$$

$$-\,\dot a_{ii} - a_{ij}\, a_{ji} + \Lambda = 4\,\pi\, G\, \varrho\,. \tag{1.8}$$

Dabei wurde (1.2) in (1.3) eingesetzt. Die Integrabilitätsbedingungen von (1.7) lauten wegen der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen räumlichen Ableitungen von $\Phi$

$$\dot a_{ik} + a_{ij}\, a_{jk} = \dot a_{ki} + a_{kj}\, a_{ji}\,. \tag{1.9}$$

Setzt man

$$a_{ik} = a_{\underline{ik}} + a_{\underset{\vee}{ik}}\,, \qquad a_{\underline{ik}} = a_{\underline{ki}}\,, \qquad a_{\underset{\vee}{ik}} = -\,a_{\underset{\vee}{ki}}\,, \tag{1.10}$$

so lassen sich die Gl. (1.6), (1.8) und (1.9) schreiben

$$\boxed{\begin{aligned} \dot\varrho + a_{\underline{kk}}\,\varrho &= 0\,, && (1.11)\\ -\,\dot a_{\underline{kk}} - a_{\underline{ik}}\, a_{\underline{ik}} + a_{\underset{\vee}{ik}}\, a_{\underset{\vee}{ik}} + \Lambda &= 4\,\pi\, G\,\varrho\,, && (1.12)\\ \dot a_{\underset{\vee}{ik}} &= a_{\underline{ij}}\, a_{\underset{\vee}{kj}} + a_{\underline{jk}}\, a_{\underset{\vee}{ji}}\,. && (1.13) \end{aligned}}$$

Wenn (1.13) erfüllt ist, folgt aus (1.7) durch einfache Integration

$$\boxed{\Phi = -\frac{1}{2}\,(\dot a_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, x_i\, x_k - (\dot b_i + a_{ik}\, b_k)\, x_i - f(t)\,.} \tag{1.14}$$

Die Funktion $f(t)$ ist beliebig.

Die Lösung des Problems ist also zurückgeführt auf die Auflösung des Systems (1.11) bis (1.13). Dieses System enthält die fünf Funktionen

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



$p(t)$, $b_i(t)$ und $f(t)$ nicht mehr. Es besteht aus fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die zehn unbekannten Funktionen $a_{\underline{ik}}$, $a_{\underset{\vee}{ik}}$ und $\varrho$.

Die Auflösung des Systems (1.11) bis (1.13) läßt sich folgendermaßen durchführen: Man setzt

$$a_{\underline{jj}} = 3\,\frac{\dot{R}}{R}\,, \qquad a_{\underline{ik}} = q_{ik} + \frac{\dot{R}}{R}\,\delta_{ik}\,. \tag{1.15}$$

Dann ist

$$q_{ik} = q_{ki}\,, \qquad q_{ii} = 0\,. \tag{1.16}$$

Führt man (1.15) in (1.11) bis (1.13) ein, so erhält man wegen (1.16)

$$(\varrho\, R^3)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0, \tag{1.17}$$

$$-3\,\frac{\ddot{R}}{R} - q_{ik}\,q_{ik} + a_{\underset{\vee}{ik}}\,a_{\underset{\vee}{ik}} + \Lambda = 4\,\pi\,G\,\varrho\,, \tag{1.18}$$

$$(R^2\,a_{\underset{\vee}{ik}})^{\boldsymbol{\cdot}} = q_{ij}\,a_{\underset{\vee}{kj}}\,R^2 + q_{jk}\,a_{\underset{\vee}{ji}}\,R^2\,. \tag{1.19}$$

Aus (1.17) folgt mit der Integrationskonstanten $\mathfrak{M} > 0$

$$\frac{4\,\pi}{3}\,\varrho\,R^3 = \mathfrak{M}\,. \tag{1.20}$$

Man erhält dann aus (1.18) und (1.20)

$$\ddot{R} - \frac{R}{3}\,(\Lambda - q_{ik}\,q_{ik}) - \frac{1}{3\,R^3}\,a_{\underset{\vee}{ik}}\,a_{\underset{\vee}{ik}}\,R^4 + \frac{G\,\mathfrak{M}}{R^2} = 0\,. \tag{1.21}$$

Zur Vereinfachung von (1.19) setzt man

$$s_l = R^2\,w_l\,, \qquad w_l = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{lik}\,a_{\underset{\vee}{ik}}\,. \tag{1.22}$$

Hier ist $w_l$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Substrates. $\varepsilon_{lik}$ ist ein in allen Indizes schiefsymmetrischer Tensor, für den gilt $\varepsilon_{123} = +1$ in einem positiv orientierten Koordinatensystem und $\varepsilon_{123} = -1$ in einem negativ orientierten Koordinatensystem. Für den $\varepsilon$-Tensor gilt insbesondere die wichtige Formel

$$\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{lik} = \delta_{mi}\,\delta_{nk} - \delta_{mk}\,\delta_{ni}\,. \tag{1.23}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{lmk} = 2\,\delta_{nk}\,. \tag{1.24}$$

Aus (1.22) erhält man nun mit (1.23)

$$\varepsilon_{lmn}\,S_l = R^2\,a_{\underset{\vee}{mn}}, \qquad a_{\underset{\vee}{mn}} = \varepsilon_{lmn}\,w_l\,. \tag{1.25}$$

Aus (1.25) folgt noch in Verbindung mit (1.24)

$$(R^2\,a_{\underset{\vee}{ik}})\,(R^2\,a_{\underset{\vee}{ik}}) = 2\,s_j\,s_j \tag{1.26}$$

setzt man nun (1.25) in (1.19) ein, so folgt sogleich

$$\dot{s}_j = q_{jr}\,s_r\,. \tag{1.27}$$

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Diese Gleichung hätte man natürlich auch ohne Benutzung des $\varepsilon$-Tensors gewinnen können.

Unser System (1.11) bis (1.13) lautet nun

$$\frac{4\pi}{3}\varrho R^3 = \mathfrak{M}, \tag{1.28}$$

$$\ddot{R} - \frac{R}{3}(\Lambda - q_{ik} q_{ik}) - \frac{2}{3}\frac{s_j s_j}{R^3} + \frac{G\mathfrak{M}}{R^2} = 0, \tag{1.29}$$

$$\dot{s}_j = q_{jk} s_k. \tag{1.30}$$

Dabei ist dann

$$\boxed{a_{ik} = q_{ik} + \frac{\dot{R}}{R}\delta_{ik} + \frac{1}{R^2}\varepsilon_{lik} s_l.} \tag{1.31}$$

Bei der Auflösung des Systems (1.28) bis (1.30) können die fünf Funktionen $q_{ik}$ willkürlich vorgegeben werden. Mit ihrer Hilfe bestimmt man dann aus (1.30) die $s_j$. Aus (1.29) erhält man dann $R$, aus (1.28) $\varrho$ und aus (1.31) $a_{ik}$.

Man könnte daran denken, die Unterbestimmtheit des Systems (1.11) bis (1.13) aufzuheben durch zusätzliche Forderungen an das Potential $\Phi$. Schränkte man beispielsweise das Potential durch die Forderung ein, daß die Koeffizienten des in den Ortskoordinaten quadratischen Anteils von der Form $g(t)\,\delta_{ik}$ sind, so erhielte man aus (1.14) die Gleichungen

$$-\frac{1}{2}(\dot{a}_{ik} + a_{ij} a_{jk}) = g(t)\,\delta_{ik}. \tag{1.32}$$

Daraus folgt nach Verjüngung wegen (1.10)

$$-\dot{a}_{\underline{kk}} - a_{\underline{ik}} a_{\underline{ik}} + a_{\underset{\vee}{ik}} a_{\underset{\vee}{ik}} = 6\,g(t). \tag{1.33}$$

Durch Vergleich mit (1.12) folgt daraus

$$g(t) = \frac{2\pi}{3} G\varrho - \frac{\Lambda}{6}. \tag{1.34}$$

In diesem Fall hätten wir also für die zehn Funktionen $a_{ik}$ und $\varrho$ die zehn Differentialgleichungen

$$\dot{\varrho} + a_{kk}\varrho = 0, \tag{1.35}$$

$$-\dot{a}_{ik} - a_{ij} a_{jk} = \left(\frac{4\pi}{3} G\varrho - \frac{\Lambda}{3}\right)\delta_{ik}. \tag{1.36}$$

Für das Potential folgt

$$\Phi = \left(\frac{2\pi}{3} G\varrho - \frac{\Lambda}{6}\right) x_i x_i - (\dot{b}_i + a_{ik} b_k)\, x_i - f(t). \tag{1.37}$$

Die Lösungen des Systems (1.35), (1.36) wurden von A. STÖHR [8] im Falle $\Lambda = 0$ untersucht und neuerdings durch RÜSSMANN [7] eingehend diskutiert. Die gleiche Einschränkung des Potentials hat O. HECKMANN [3] durchweg festgehalten, andererseits aber die von A. STÖHR

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



berücksichtigten Terme in $a_{ik}$ ohne ausreichende Begründung fortgelassen.

Im folgenden soll das Potential jedoch nicht in der eben geschilderten Weise spezialisiert werden. Wir gehen deshalb zu den Gl. (1.11) bis (1.14) zurück.

Im Rahmen der NEWTONschen Mechanik steht es uns noch frei, von dem hier benutzten Inertialsystem $J$ auf ein dagegen fest verdrehtes und geradlinig, gleichförmig bewegtes Inertialsystem $J'$ überzugehen. $J'$ (mit den Koordinaten $x'_i$, $t'$) hängt mit $J$ zusammen durch die Formeln der sog. GALILEI-Transformation

$$x_i = A_{ij}(x'_j + B_j t' + C_j), \qquad t = t' + t_0 \tag{1.38}$$

mit

$$A_{ij}A_{ir} = \delta_{jr}; \qquad A_{ij}, \quad B_j, \quad C_j, \quad t_0 \quad \text{konstant.} \tag{1.39}$$

Durch Differentiation von (1.38) nach $t$ folgt wegen (1.39)

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ij}\left(\frac{dx'_j}{dt'} + B_j\right), \tag{1.40}$$

also auch

$$v_i = A_{ij}(v'_j + B_j). \tag{1.41}$$

Aus (1.4), (1.38) und (1.41) kommt

$$a_{ik}A_{kj}(x'_j + B_j t' + C_j) + b_i = A_{ij}(v'_j + B_j). \tag{1.42}$$

Nach Multiplikation mit $A_{ir}$ erhält man wegen (1.39)

$$v'_r = a'_{rj}x'_j + b'_r \tag{1.43}$$

mit

$$a'_{rj} = A_{ir}\,a_{ik}\,A_{kj}, \tag{1.44}$$

$$b'_r = a'_{rj}(B_j t' + C_j) + A_{ir}b_i - B_r. \tag{1.45}$$

Aus (1.44) folgt, daß sich die Matrix $a_{ik}$ zu einer bestimmten Zeit durch eine geeignete orthogonale Transformation vereinfachen läßt.

## § 2.

Bevor im folgenden Paragraphen spezielle Lösungen untersucht werden, wollen wir die Gleichungen des § 1 noch genauer interpretieren.

Die durch (1.4) und (1.5) getroffene Auswahl unter den Lösungen (1.1) bis (1.3) hat die folgende Bedeutung: (1.5) formuliert eine Homogenitätseigenschaft des Weltsubstrates; (1.4) eine Homogenitätseigenschaft des Geschwindigkeitsfeldes. Gl. (1.4) ist der Aussage äquivalent: *die Relativgeschwindigkeit zweier Substratelemente zur Zeit $t$ hängt nur von ihren Relativkoordinaten ab.* Seien nämlich $x_j$ und $y_j$ die Lagekoordinaten zweier Substratelemente zur Zeit $t$, so folgt aus (1.4)

$$v_i(x_j, t) - v_i(y_j, t) = a_{ij}(t)\,(x_j - y_j). \tag{2.1}$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Umgekehrt folgt aus unserer Aussage auch sogleich wieder (1.4). Sie besagt doch offenbar, daß

$$v_i(x_j, t) - v_i(y_j, t) = v_i(x_j + a_j, t) - v_i(y_j + a_j, t) \tag{2.2}$$

mit beliebigem $a_j$ gelten muß, da die Substratelemente $x_j$ und $y_j$ relativ zueinander die gleiche Lage haben wie die Substratelemente $x_j + a_j$ und $y_j + a_j$. Partielle Differentiation von (2.2) nach $x_k$ ergibt

$$v_{i|k}(x_j, t) = v_{i|k}(x_j + a_j, t). \tag{2.3}$$

Aus (2.3) folgt, daß $v_{i|k}$ nur noch von $t$ abhängt, also

$$v_{i|k} = a_{ik}(t). \tag{2.4}$$

Durch Integration erhält man aus (2.4) sogleich (1.4).

Unser Satz lehrt, daß jeder im Substrat mitschwimmende Beobachter in *kinematischer* Hinsicht den gleichen Anblick von der Welt hat, kurz, daß mitschwimmende Beobachter kinematisch gleichberechtigt sind. In *dynamischer* Hinsicht ist das jedoch nur scheinbar nicht der Fall: zwei Substratelemente an den Stellen $x_k$ und $y_k$ besitzen nämlich nach (1.7) die Relativbeschleunigung

$$(\dot{a}_{ik} + a_{ij} a_{jk})(x_k - y_k). \tag{2.5}$$

Mindestens im Falle $\Lambda \leqq 0$ kann sie jedoch nicht für alle Paare von Substratelementen verschwinden, denn wegen (1.8) müßte dann auch $\varrho \leqq 0$ sein. Dieser uninteressante Fall schließt jede Kosmologie aus und soll hier beiseite gelassen werden. Es treten also für $\Lambda \leqq 0$ stets Relativbeschleunigungen der Substratelemente auf, und in der üblichen Interpretation der NEWTONschen Mechanik folgt daraus, daß die einzelnen Substratelemente verschiedene Beschleunigungen gegen den „absoluten Raum" haben. Bei $\Lambda > 0$ gibt es Fälle, in welchen die Relativbeschleunigung bei positiver Materiedichte verschwindet. In allen Fällen nichtverschwindender Relativbeschleunigung könnte man sich zu dem Schluß verleiten lassen, daß die mitschwimmenden Beobachter zwar kinematisch, nicht aber *dynamisch* äquivalent seien.

Dieser Schluß wäre nur dann sinnvoll, wenn man im Rahmen der NEWTONschen Mechanik ein Experiment angeben könnte, durch das sich die Beschleunigung irgendeines mitschwimmenden Beobachters gegen den absoluten Raum ermitteln ließe. Dann erhielte man durch die Kenntnis der Relativbewegung die Beschleunigungen aller anderen Substratelemente gegen den „absoluten Raum"[1]. Die Beschleunigung

[1] Die Kenntnis, die die Beobachter im Rahmen dieser Betrachtungen gewinnen können, schließen folgendes ein:

1. Sie können stets mit Hilfe eines Trägheitskreisels die Achsen ihrer Koordinatensysteme festlegen, sie also parallel zu denen eines Trägheitssystems ausrichten.

2. Sie können ein Bild des Strömungsfeldes relativ zu sich gewinnen. Das heißt, sie können die $a_{ik}$ ermitteln.

Optische Betrachtungen haben wir absichtlich unterdrückt. Sie würden im Prinzip ähnlich ausfallen müssen wie diejenigen in Anm. 8, S. 26ff.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



desjenigen Substratelementes, das sich jeweils gerade im Nullpunkt von $J$ befindet, ist nach (1.7) wegen $x_k = 0$

$$\dot{b}_i + a_{ik}\, b_k. \tag{2.6}$$

Unsere Frage lautet nun: Ist der durch (2.6) gegebene Vektor durch dynamische Experimente bestimmbar? Wir diskutieren zwei Experimente A und B.

A. Wenn ein Beobachter $\alpha$ an der Stelle $x_k^\alpha$ einen Probekörper mit Koordinaten $y_k^\alpha$ z. Z. $t_0$ abwirft und ein Beobachter $\beta$ an der Stelle $x_k^\beta$ einen Probekörper mit Koordinaten $y_k^\beta$ zur gleichen Zeit $t_0$ abwirft und beide Probekörper relativ zu ihren Beobachtern die gleiche Anfangsgeschwindigkeit nach Größe und Richtung besitzen, so wird nach (1.7) das Verhalten der Probekörper durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 y_i^\alpha}{d t^2} = (\dot{a}_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, y_k^\alpha + \dot{b}_i + a_{ik}\, b_k, \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2 y_i^\beta}{d t^2} = (\dot{a}_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, y_k^\beta + \dot{b}_i + a_{ik}\, b_k \tag{2.8}$$

bestimmt. Führt man Relativkoordinaten ein durch

$$y_k^\alpha - x_k^\alpha = \xi_k^\alpha, \qquad y_k^\beta - x_k^\beta = \xi_k^\beta, \tag{2.9}$$

erhält man wegen (1.7)

$$\frac{d^2 \xi_i^\alpha}{d t^2} = (\dot{a}_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, \xi_k^\alpha, \tag{2.10}$$

$$\frac{d^2 \xi_i^\beta}{d t^2} = (\dot{a}_{ik} + a_{ij}\, a_{jk})\, \xi_k^\beta. \tag{2.11}$$

Da die Anfangsbedingungen lauten

$$\frac{d\, \xi_k^\alpha(t_0)}{d t} = \frac{d\, \xi_k^\beta(t_0)}{d t}, \qquad \xi_k^\alpha(t_0) = \xi_k^\beta(t_0) = 0, \tag{2.12}$$

so werden die Bahnen der beiden Probekörper durch dieselben Gleichungen und Anfangsbedingungen beschrieben. Die Größen (2.6) treten in den Gl. (2.10) und (2.11) nicht mehr auf, lassen sich also durch Probekörperexperimente nicht ermitteln.

B. Sind die Beobachter $\alpha$ und $\beta$ mit gleichen Federwaagen ausgestattet, sollten sich ihre (kinematisch beobachtbaren!) Relativbeschleunigungen aus den Differenzen der Reaktionskräfte ergeben. Die Relativbeschleunigung zwischen $\alpha$ und $\beta$ ist jedoch hervorgerufen durch die Differenz der Gravitationskräfte. Diese beiden Kraftdifferenzen sind entgegengesetzt gleich, kompensieren sich also genau. Durch das Federwaagenexperiment kann kein Beobachter vor einem anderen ausgezeichnet werden. Das Koordinatensystem eines Beobachters ist in infinitesimaler Nachbarschaft des Ursprungs seines parallel zum Trägheits-

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



system mitgeführten Koordinatensystems das eines freifallenden EINSTEINschen Fahrstuhls.

Aus den Experimenten A und B schließen wir, daß die translativ beliebig beschleunigte Bewegung eines Substratelementes gegen den „absoluten Raum" keine auf mechanischem Wege beobachtbare Größe ist.

Wir behaupten deswegen: die Größen (2.6) sind frei wählbar, insbesondere können wir sie gleich Null setzen; mehr noch: wir können — als mit dieser Wahl verträglich — die $b_i$ gleich Null setzen, das Trägheitssystem also mit einem Beobachter mitschwimmen lassen. Das besagt nach (1.14), daß die in den Koordinaten linearen Terme des Potentials $\Phi$ verschwinden. Ein homogenes zeitlich variables Schwerfeld kann also willkürlich erzeugt oder „wegtransformiert" werden durch Wahl eines beschleunigten Koordinatensystems bzw. durch andere Wahl der $b_i$.

Da wir gegeneinander beschleunigte Koordinatensysteme zur Beschreibung mechanischer Phänomene zulassen, transformiert sich das Potential $\Phi$ nicht als Invariante, wenn es seine Bedeutung als Kräftefunktion in allen Koordinatensystemen beibehalten soll. Hängen also zwei Systeme mit parallelen Achsen durch die Transformation

$$x'_i = x_i + P_i(t), \qquad P_i(t) \text{ beliebig,} \tag{2.13}$$

zusammen, soll gelten

$$\frac{d^2 x'_i}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi'(x'_j)}{\partial x'_i} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 x_i}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi(x_j)}{\partial x_i}. \tag{2.14}$$

Aus (2.13) folgt durch zweimalige Differentiation nach der Zeit

$$\frac{d^2 x'_i}{d t^2} = \frac{d^2 x_i}{d t^2} + \frac{d^2 P_i}{d t^2}, \tag{2.15}$$

also wegen (2.14)

$$-\frac{\partial \Phi'(x'_j)}{\partial x'_i} = -\frac{\partial \Phi(x_j)}{\partial x_i} + \frac{d^2 P_i}{d t^2}, \tag{2.16}$$

mithin

$$\Phi'(x'_j) = \Phi(x_j) - \ddot{P}_i x_i + h(t) \tag{2.17}$$

mit beliebigem $h(t)$. Statt (1.14) können wir nun endlich setzen

$$\boxed{\Phi = -\frac{1}{2}(\dot{a}_{ik} + a_{ij} a_{jk}) x_i x_k.} \tag{2.18}$$

Vermöge der eben bemerkten Transformationseigenschaften des Potentials können die $x_i$ Relativkoordinaten bezüglich einer beliebigen Substratpartikel sein. Jeder mitschwimmende Beobachter findet für das Potential in seinem mitgeführten Koordinatensystem den gleichen Ausdruck.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Zum Abschluß dieses Paragraphen noch drei Bemerkungen:

1. In unseren vorangehenden Überlegungen spielte die Gleichheit von träger und schwerer Masse, die hier schon in die Formulierung der Grundgleichungen einging, eine entscheidende Rolle.

2. Sämtliche verwendeten Koordinatensysteme sollten zu $J$ parallel orientiert sein. Die Rotation bleibt nach wie vor absolut.

3. Für die Newtonsche Mechanik empfiehlt es sich, von vornherein translativ beliebig beschleunigte Koordinatensysteme zuzulassen. Das ebnet den Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die hier vorgenommene Diskussion zeigt, daß die Auffassung von H. Bondi [1] durchaus begründet werden kann. Entgegen den Ansichten von D. Layzer [4] ist die Newtonsche Mechanik in ihrem Gültigkeitsbereich zur Diskussion kosmologischer Fragen geeignet. Die von W. McCrea [6] neuerdings eingeführte Beschränkung der Newtonschen Kosmologie auf endliche Systeme ist nicht notwendig.

## § 3.

Wir diskutieren einen Spezialfall des Systems (1.28) bis (1.30). Für die fünf willkürlichen Funktionen setzen wir

$$q_{ik} = 0. \tag{3.1}$$

Dann folgt aus (1.30)

$$s_j = \text{const}, \tag{3.2}$$

und zur Abkürzung setzen wir

$$s_j\, s_j = k^2 = \text{const}. \tag{3.3}$$

Weil $s_j$ eine feste Richtung besitzt, können wir nach § 1 ein Koordinatensystem wählen, in dem gilt

$$s_1 = w_1 R^2 = 0, \qquad s_2 = w_2 R^2 = 0, \qquad s_3 = w_3 R^2 = k = -R^2 \omega. \tag{3.4}$$

Hier ist $w_3 = -\omega$ die im allgemeinen zeitabhängige Winkelgeschwindigkeit des Substrates, das sich wie ein starrer Körper um die $x_3$-Achse dreht. Die Gl. (1.28) und (1.29) lauten jetzt

$$\frac{4\pi}{3} \varrho R^3 = \mathfrak{M}, \tag{3.5}$$

$$\ddot{R} - \frac{\Lambda}{3} R - \frac{2k^2}{3R^3} + \frac{6\mathfrak{M}}{R^2} = 0. \tag{3.6}$$

Nach (1.31) gilt

$$a_{ik} = \frac{\dot{R}}{R} \delta_{ik} - \varepsilon_{3ik} \cdot \omega. \tag{3.7}$$

Aus (2.18) und (3.2) bis (3.7) folgt für das Potential

$$\Phi = \frac{1}{6}(4\pi G \varrho - \Lambda - 2\omega^2)\, x_i\, x_i + \frac{1}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2). \tag{3.8}$$

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Nur für $\Lambda = 0$, $\omega = 0$ kommt man auf STÖHRsche Modelle. Wir untersuchen zunächst den Sonderfall

$$\dot{R} = 0. \tag{3.9}$$

Dann folgt aus (3.5), daß $\varrho$ konstant ist. Aus (3.4) erhält man die Konstanz von $\omega$, und aus (3.6) kommt die wichtige Beziehung

$$\Lambda + 2\,\omega^2 = 4\,\pi\,G\,\varrho. \tag{3.10}$$

Gl. (3.7) liefert

$$a_{12} = -\,\omega\,, \qquad a_{21} = \omega\,, \qquad a_{ik} = 0 \text{ sonst}. \tag{3.11}$$

Wir erhalten also nach (1.4)

$$v_1 = -\,\omega\,x_2, \qquad v_2 = \omega\,x_1, \qquad v_3 = 0. \tag{3.12}$$

Für das Potential gewinnen wir aus (3.8) und (3.10)

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\omega^2\,(x_1^2 + x_2^2). \tag{3.13}$$

Die Bewegungsgleichungen der Substratelemente lauten nach (3.12)

$$\frac{d\,x_1}{d\,t} = -\,\omega\,x_2\,, \qquad \frac{d\,x_2}{d\,t} = \omega\,x_1\,, \qquad \frac{d\,x_3}{d\,t} = 0\,. \tag{3.14}$$

Integration ergibt mit den Konstanten $r_0$, $\varphi_0$, $z_0$

$$x_1 = r_0 \cos(\omega\,t - \varphi_0), \qquad x_2 = r_0 \sin(\omega\,t - \varphi_0), \qquad x_3 = z_0. \tag{3.15}$$

Die Bahnen sind Kreise um die $x_3$-Achse parallel zur Ebene $x_3 = 0$. Für einen nicht notwendig zum Substrat gehörenden Probekörper lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2\,x_i}{d\,t^2} = -\,\Phi_{|i}\,. \tag{3.16}$$

Daraus folgt nach (3.13)

$$\frac{d^2\,x_1}{d\,t^2} + \omega^2 x_1 = 0\,, \qquad \frac{d^2\,x_2}{d\,t^2} + \omega^2\,x_2 = 0\,, \qquad \frac{d^2\,x_3}{d\,t^2} = 0\,. \tag{3.17}$$

Bezüglich $x_1$ und $x_2$ sind das die bekannten Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega/2\,\pi$. Wir haben zu Beginn von § 1 darauf hingewiesen, daß die Grundgleichungen (1.1) bis (1.3) sinnlos werden für $\varrho = 0$. Man darf deshalb auch in den Gln. (3.8) ff. nicht $\varrho = 0$ setzen, da man sonst zu sinnlosen Aussagen käme. Wir begnügen uns mit dieser kurzen Bemerkung, obwohl man an dieser Stelle leicht die ganze Problematik des sog. MACHschen Prinzips aufrollen könnte.

Die hier soeben besprochenen Modelle besitzen teilweise relativistische Analoga. Setzt man in (3.10) $\omega = 0$, erhält man den statischen Einsteinkosmos. Setzt man $\Lambda = -\,4\,\pi\,G\,\varrho$, erhält man das GÖDELsche Modell.



© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Wir wenden uns nun zur Untersuchung des allgemeineren Falles

$$\dot{R} \neq 0. \tag{3.18}$$

Jetzt ergibt die Multiplikation von (3.6) mit $\dot{R}$ nach anschließender Integration

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{\Lambda}{6}R^2 + h + \frac{G\mathfrak{M}}{R} - \frac{k^2}{3R^2}.} \tag{3.19}$$

Dabei ist $h$ eine Integrationskonstante. Für $k = 0$ geht diese Gleichung in die FRIEDMANNsche Differentialgleichung über. In diesem Falle sind die relativistischen Analoga bekannt.

Die Lösungen der Differentialgleichung (3.19) lassen sich vollständig überschauen, ohne daß die Integration in extenso ausgeführt werden müßte. Dazu führen wir neue Veränderliche ein durch

$$R = \alpha x, \quad t = \beta\tau, \quad \dot{R} = \frac{\alpha}{\beta}y, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \beta = \text{const} > 0. \tag{3.20}$$

Dann wird aus (3.19)

$$y^2 = \frac{\Lambda\beta^2}{3}x^2 + \frac{2h\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2G\mathfrak{M}\beta^2}{\alpha^3}\frac{1}{x} - \frac{2k^2\beta^2}{3\alpha^4}\frac{1}{x^2}. \tag{3.21}$$

Für $\Lambda \neq 0$ setzen wir nun

$$\frac{\Lambda\beta^2}{3} = \eta = \frac{\Lambda}{|\Lambda|}, \quad \frac{2h\beta^2}{\alpha^2} = b, \quad \frac{2G\mathfrak{M}\beta^2}{\alpha^3} = 1, \quad \frac{2k^2\beta^2}{3\alpha^4} = a^2. \tag{3.22}$$

Gl. (3.19) lautet dann

$$y^2 = \eta x^2 + b + \frac{1}{x} - \frac{a^2}{x^2}; \qquad \eta = \pm 1. \tag{3.23}$$

Für $\Lambda = 0$ setzen wir

$$\frac{2h\beta^2}{\alpha^2} = b, \quad \frac{2G\mathfrak{M}\beta^2}{\alpha^3} = 1, \quad \frac{2k^2\beta^2}{3\alpha^4} = \begin{cases} 1 \text{ für } k \neq 0 \\ 0 \text{ für } k = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

also

$$y^2 = \begin{cases} b + \dfrac{1}{x}, & k = 0 \\ b + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}, & k \neq 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

Deutet man $x$ und $y$ als rechtwinklige Koordinaten, so kann man auf Grund der Kurvenscharen (3.23) und (3.25) qualitative Aussagen über die Lösungen von (3.19) machen. Darüber hinaus gewinnt man auch Aussagen über die Stabilität der Lösungen, wenn man sie in der $x$-$y$-Phasenebene in Abhängigkeit vom Energieparameter $b$ betrachtet.

Für (3.25) — also $\Lambda = 0$ — ergeben sich die folgenden Bilder in den Fällen $a = 0$ und $a \neq 0$.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Die angeschriebenen Zahlenwerte beziehen sich auf den Parameter $b$. Der bemerkenswerte Unterschied zwischen beiden Lösungen liegt darin, daß die Singularität bei $x = 0$ im Falle 1a fortfällt und daß eine stabile statische Lösung existiert. Für $b < -\frac{1}{4}$ existieren im Falle 1a keine Lösungen mehr.

Für (3.23) mit $\eta = -1$ — also $\Lambda < 0$ — existieren nur beschränkte Lösungen.

Für $a \neq 0$ fällt die Singularität fort, und es existiert eine statische Lösung, die stabil ist.

Für (3.23) mit $\eta = 1$ — also $\Lambda > 0$ — tritt bei $a = 0$ die instabile statische EINSTEINsche Lösung auf, gegen welche 4 verschiedene Lösungszweige asymptotisch konvergieren. Für $a \neq 0$ sind 3 Fälle zu unterscheiden. Die in Abb. 3 teilweise vorhandenen Singularitäten bei $x = 0$ fallen fort; eine statische stabile Lösung tritt dagegen auf bei $a^2 < 3/16$. Eine zweite statische Lösung mit größerem $R$ hat einen ähnlichen Charakter wie die EINSTEINsche. Die Fälle $a^2 = 3/16$ und $a^2 > 3/16$ ergeben die Abbildungen 3b u. c.

Wieder fallen die Singularitäten bei $x = 0$ fort und im Falle 3b existiert noch eine instabile Lösung, die durch Zusammenrücken der statischen Lösungen des vorigen Falles entsteht.

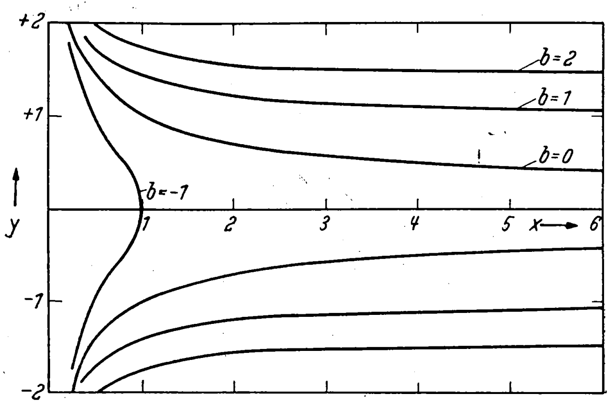


Abb. 1. $\Lambda = 0$, $a = 0$. $y = \sqrt{b + 1/x}$.

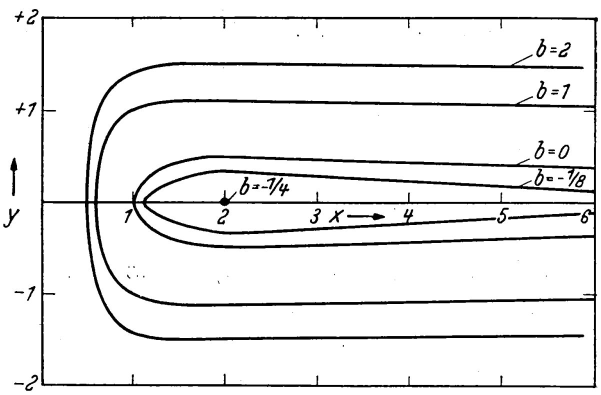


Abb. 1a. $\Lambda = 0$; $a = 1$. $y = \sqrt{b + 1/x - 1/x^2}$.

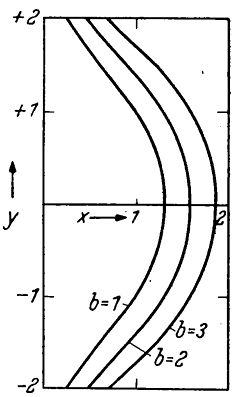


Abb. 2. $\Lambda < 0$; $a = 0$. $y = \sqrt{-x^2 + b + 1/x}$.

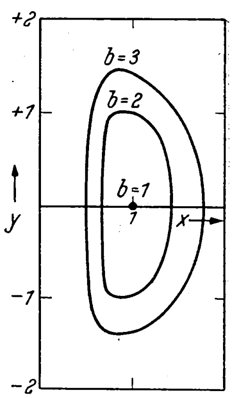


Abb. 2a. $\Lambda < 0$; $a = 1$. $y = \sqrt{-x^2 + b + 1/x - 1/x^2}$.



© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Das Charakteristikum der Einführung einer Rotation in ein isotrop expandierendes Modell ist die Beseitigung der Singularität bei $R = 0$ und das Auftreten von statischen Lösungen.

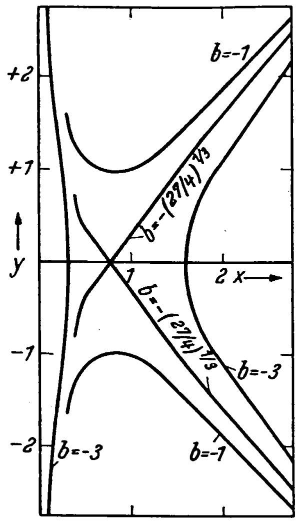

Abb. 3. $a = 0$. $y = \sqrt{x^2 + b + 1/x}$.

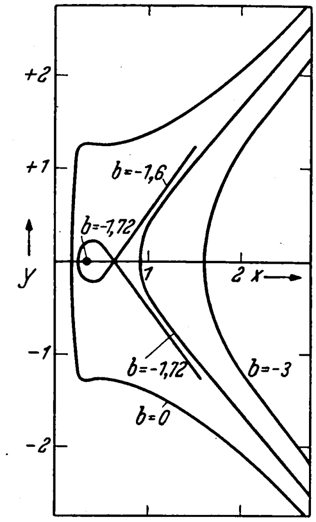

Abb. 3a. $a^2 = 0.15$. $y = \sqrt{x^2 + b + 1/x - 0.15/x^2}$.

Die hier gefundenen Lösungseigenschaften sind natürlich zunächst beschränkt auf die Gl. (3.19). Insbesondere gilt die Stabilität nur innerhalb der betrachteten Lösungsscharen. Sie braucht nicht erhalten zu bleiben im Felde der Lösungen des allgemeinen Problems (1.29) und (1.30).

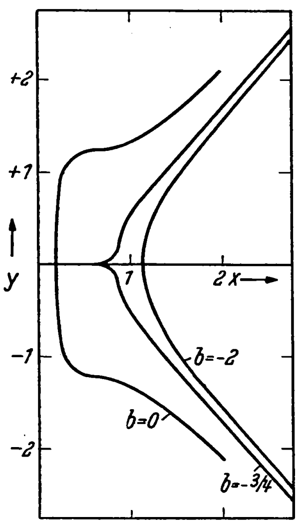

Abb. 3b. $a^2 = 3/16$. $y = 1/x\sqrt{x^4 + b x^2 + x - 3/16}$.
In der Abb. steht irrtümlich 3/4 statt 3/2.

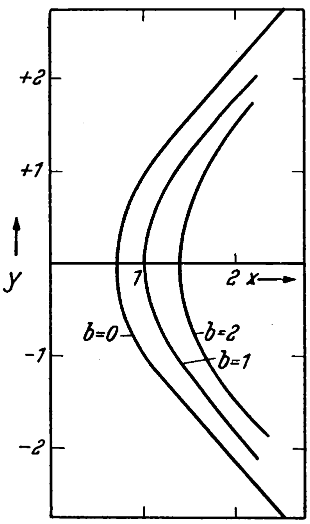

Abb. 3c. $a^2 = 1$. $y = \sqrt{x^2 + b + 1/x - 1/x^2}$.
In der Abb. steht irrtümlich 1 und 2 statt $-1$ und $-2$.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1955ZA.....38...95H



Die angestellten Betrachtungen rechtfertigen die Hoffnung, analoge Weltmodelle im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie wiederzufinden. Einige Anzätze dazu finden sich bereits bei GÖDEL [2a].

### *Literatur.*

[1] BONDI, H.: Cosmology. Cambridge 1952, S. 78. — [2] GÖDEL, K.: Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949). — [2a] GÖDEL, K.: Proc. Int. Congr. Math. (Cambridge Mass. Aug. 30th — Sept. 5th 1950) **1**, 175—181 (1952). — [3] HECKMANN, O.: Theorien der Kosmologie. Berlin 1942, S. 12 u. 14/15. — [4] LAYZER, D.: Astrophysic. J. **59**, 268 (1954). — [5] MCCREA, W., and E. MILNE: Quart. J. Math., Oxford Ser. **5**, 73 (1934). — [6] MCCREA, W.: Nature (London) **175**, 466 (1955). — [7] RÜSSMANN, H.: Briefliche Mitt. — [8] STÖHR, A.: Math. Nachr. **6**, 71 (1951).

Prof. Dr. O. HECKMANN und Dipl. math. E. SCHÜCKING, Hamburger Sternwarte, Hamburg-Bergedorf.

© Springer-Verlag • Provided by the NASA Astrophysics Data System