Zur allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

In den letzten Jahren war ich bemüht, auf die Voraussetzung der Relativität auch nicht gleichförmiger Bewegungen eine allgemeine Relativitätstheorie zu gründen. Ich glaubte in der Tat, das einzige Gravitationsgesetz gefunden zu haben, das dem sinngemäß gefaßten, allgemeinen Relativitätspostulate entspricht, und suchte die Notwendigkeit gerade dieser Lösung in einer im vorigen Jahre in diesen Sitzungsberichten erschienenen Arbeit[1] darzutun.

Eine erneute Kritik zeigte mir, daß sich jene Notwendigkeit auf dem dort eingeschlagenen Wege absolut nicht erweisen läßt; daß dies doch der Fall zu sein schien, beruhte auf Irrtum. Das Postulat der Relativität, soweit ich es dort gefordert habe, ist stets erfüllt, wenn man das Hamiltonsche Prinzip zugrunde legt; es liefert aber in Wahrheit keine Handhabe für eine Ermittelung der Hamiltonschen Funktion H des Gravitationsfeldes. In der Tat drückt die die Wahl von H einschränkende Gleichung (77) a. a. O. nichts anderes aus, als daß H eine Invariante bezüglich linearer Transformationen sein soll, welche Forderung mit der der Relativität der Beschleunigung nichts zu schaffen hat. Ferner wird die durch Gleichung (78) a. a. O. getroffene Wahl durch Gleichung (77) keineswegs festgelegt.

Aus diesen Gründen verlor ich das Vertrauen zu den von mir aufgestellten Feldgleichungen vollständig und suchte nach einem Wege, der die Möglichkeiten in einer natürlichen Weise einschränkte. So gelangte ich zu der Forderung einer allgemeineren Kovarianz der Feldgleichungen zurück, von der ich vor drei Jahren, als ich zusammen mit meinem Freunde Grossmann arbeitete, nur mit schwerem Herzen abgegangen war. In der Tat waren wir damals der im nachfolgenden gegebenen Lösung des Problems bereits ganz nahe gekommen.

Wie die spezielle Relativitätstheorie auf das Postulat gegründet ist, daß ihre Gleichungen bezüglich linearer, orthogonaler Transfor-

[1] Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte XLI, 1914, S. 1066—1077. Im folgenden werden Gleichungen dieser Abhandlungen beim Zitieren durch den Zusatz »a. a. O.« von solchen der vorliegenden Arbeit unterschieden.

mationen kovariant sein sollen, so ruht die hier darzulegende Theorie auf dem Postulat der **Kovarianz aller Gleichungssysteme bezüglich Transformationen von der Substitutionsdeterminante** 1.

Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI und LEVI-CIVITER begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.

§ 1. Bildungsgesetze der Kovarianten.

Da ich in meiner Arbeit vom letzten Jahre eine ausführliche Darlegung der Methoden des absoluten Differentialkalküls gegeben habe, kann ich mich hier bei der Darlegung der hier zu benutzenden Bildungsgesetze der Kovarianten kurz fassen; wir brauchen nur zu untersuchen, was sich an der Kovariantentheorie dadurch verändert, daß nur Substitutionen von der Determinante 1 zugelassen werden.

Die für beliebige Substitutionen gültige Gleichung

$$d\tau' = \frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)}\, d\tau$$

geht zufolge der Prämisse unsrer Theorie

$$\frac{\partial(x_1' \cdots x_4')}{\partial(x_1 \cdots x_4)} = 1 \tag{1}$$

über in

$$d\tau' = d\tau: \tag{2}$$

das vierdimensionale Volumelement $d\tau$ ist also eine Invariante. Da ferner (Gleichung (17) a. a. O.) $\sqrt{-g}\,d\tau$ eine Invariante bezüglich beliebiger Substitutionen ist, so ist für die uns interessierende Gruppe auch

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \tag{3}$$

Die Determinante aus den $g_{\mu\nu}$ ist also eine Invariante. Vermöge des Skalarcharakters von $\sqrt{-g}$ lassen die Grundformeln der Kovariantenbildung gegenüber den bei allgemeiner Kovarianz gültigen eine Vereinfachung zu, die kurz gesagt darin beruht, daß in den Grundformeln die Faktoren $\sqrt{-g}$ und $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ nicht mehr auftreten, und der Unterschied zwischen Tensoren und V-Tensoren wegfällt. Im einzelnen ergibt sich folgendes:

1. An Stelle der Tensoren $G_{iklm} = \sqrt{-g}\,\delta_{iklm}$

$$\text{und}\quad G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta_{iklm}$$

((19) und (21a) a. a. O.) treten die einfacher gebauten Tensoren

$$G_{iklm} = G^{iklm} = \delta_{iklm} \tag{4}$$

2. Die Grundformeln (29) a. a. O. und (30) a. a. O. für die Erweiterung der Tensoren lassen sich auf Grund unserer Prämisse nicht durch einfachere ersetzen, wohl aber die Definitionsgleichung der Divergenz, welche in der Kombination der Gleichungen (30) a. a. O. und (31) a. a. O. besteht. Sie läßt sich so schreiben

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s} + \cdots\cdots \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\cdots\alpha_{l-1}\tau s}\right] + \sum_{s\tau}\begin{Bmatrix} s\tau \\ s \end{Bmatrix} A^{\alpha_1\cdots\alpha_l\tau}. \tag{5}$$

Nun ist aber gemäß (24) a. a. O. und (24a) a. a. O.

$$\sum_\tau \begin{Bmatrix} s\tau \\ s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha s} g^{s\alpha}\left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial g_{s\tau}}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\sum g^{s\alpha}\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_\tau} = \frac{\partial(lg\sqrt{-g})}{\partial x_\tau}. \tag{6}$$

Es hat also diese Größe wegen (3) Vektorcharakter. Folglich ist das letzte Glied der rechten Seite von (5) selbst ein kontravarianter Tensor vom Range l. Wir sind daher berechtigt, an Stelle von (5) die einfachere Definition der Divergenz

$$A^{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \sum \frac{\partial A^{\alpha_1\cdots\alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{\sigma\tau}\left[\begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} A^{\tau\alpha_2\cdots\alpha_l s} + \cdots\cdot \begin{Bmatrix} s\tau \\ \alpha_l \end{Bmatrix} A^{\alpha_1-\alpha_{l-1}\tau s}\right] \tag{5a}$$

zu setzen, was wir konsequent tun wollen.

So wäre z. B. die Definition (37) a. a. O.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}\,A^\mu\right)$$

durch die einfachere Definition

$$\Phi = \sum_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} \tag{7}$$

zu ersetzen, die Gleichung (40) a. a. O. für die Divergenz des kontravarianten Sechservektors durch die einfachere

$$A^\mu = \sum_\nu \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}. \tag{8}$$

An Stelle von (41a) a. a. O. tritt infolge unserer Festsetzung

$$A_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial A_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}A_\tau^\nu. \tag{9}$$

Ein Vergleich mit (41b) zeigt, daß bei unserer Festsetzung das Gesetz für die Divergenz dasselbe ist, wie gemäß dem allgemeinen Differentialkalkül das Gesetz für die Divergenz des V-Tensors. Daß diese Bemerkung für beliebige Tensordivergenzen gilt, läßt sich aus (5) und (5a) leicht ableiten.

3. Die tiefgreifendste Vereinfachung bringt unsere Beschränkung auf Transformationen von der Determinante 1 hervor für diejenigen Kovarianten, die aus den $g_{\mu\nu}$ und ihren Ableitungen allein gebildet werden können. Die Mathematik lehrt, daß diese Kovarianten alle von dem Riemann-Christoffelschen Tensor vierten Ranges abgeleitet werden können, welcher (in seiner kovarianten Form) lautet:

$$\left.\begin{aligned}(ik, lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right) \\ + \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Das Problem der Gravitation bringt es mit sich, daß wir uns besonders für die Tensoren zweiten Ranges interessieren, welche aus diesem Tensor vierten Ranges und den $g_{\mu\nu}$ durch innere Multiplikation gebildet werden können. Infolge der aus (10) ersichtlichen Symmetrie-Eigenschaften des Riemannschen Tensors

$$\left.\begin{aligned}(ik, lm) &= (lm, ik) \\ (ik, lm) &= -(ki, lm)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

kann eine solche Bildung nur auf eine Weise vorgenommen werden; es ergibt sich der Tensor

$$G_{im} = \sum_{kl} g^{kl}(ik, lm). \qquad (12)$$

Wir leiten diesen Tensor für unsere Zwecke jedoch vorteilhafter aus einer zweiten, von Christoffel angegebenen Form des Tensors (10) ab, nämlich aus[1]

$$\{ik, lm\} = \sum_{\rho} g^{k\rho}(i\rho, lm) = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} il \\ k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_m} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} im \\ k \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{\rho}\left[\begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho m \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \rho l \\ k \end{Bmatrix}\right]. \qquad (13)$$

Aus diesem ergibt sich der Tensor G_{im}, indem man ihn mit dem Tensor

$$\delta_k^l = \sum_{\alpha} g_{k\alpha} g^{\alpha l}$$

multipliziert (innere Multiplikation):

[1] Einen einfachen Beweis für den Tensorcharakter dieses Ausdrucks findet man auf S. 1053 meiner mehrfach zitierten Arbeit.

$$G_{im} = \{il, lm\} = R_{im} + S_{im} \tag{13}$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \left\{ {im \atop l} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{\rho} \left\{ {il \atop \rho} \right\} \left\{ {\rho m \atop l} \right\} \tag{13a}$$

$$S_{im} = \frac{\partial \left\{ {il \atop l} \right\}}{\partial x_m} - \left\{ {im \atop \rho} \right\} \left\{ {\rho l \atop l} \right\}. \tag{13b}$$

Beschränkt man sich auf Transformationen von der Determinante 1, so ist nicht nur (G_{im}) ein Tensor, sondern es besitzen auch (R_{im}) und (S_{im}) Tensorcharakter. In der Tat folgt aus dem Umstande, daß $\sqrt{-g}$ ein Skalar ist, wegen (6), daß $\left\{ {il \atop l} \right\}$ ein kovarianter Vierervektor ist. (S_{im}) ist aber gemäß (29) a. a. O. nichts anderes als die Erweiterung dieses Vierervektors, also auch ein Tensor. Aus dem Tensorcharakter von (G_{im}) und (S_{im}) folgt nach (13) auch der Tensorcharakter von (R_{im}). Dieser letztere Tensor ist für die Theorie der Gravitation von größter Bedeutung.

§ 2. Bemerkungen zu den Differentialgesetzen der »materiellen« Vorgänge.

1. Impuls-Energie-Satz für die Materie (einschließlich der elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum.

An die Stelle der Gleichung (42a) a. a. O. hat nach den allgemeinen Betrachtungen des vorigen Paragraphen die Gleichung

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\tau}^{\nu} + K_{\sigma} \tag{14}$$

zu treten: dabei ist T_{σ}^{ν} ein gewöhnlicher Tensor, K_{ν} ein gewöhnlicher kovarianter Vierervektor (kein V-Tensor bzw. V-Vektor). An diese Gleichung haben wir eine für das Folgende wichtige Bemerkung zu knüpfen. Diese Erhaltungsgleichung hat mich früher dazu verleitet, die Größen

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

als den natürlichen Ausdruck für die Komponenten des Gravitationsfeldes anzusehen, obwohl es im Hinblick auf die Formeln des absoluten Differentialkalküls näher liegt, die Christoffelschen Symbole

$$\left\{ {\nu\sigma \atop \tau} \right\}$$

statt jener Größen einzuführen. Dies war ein verhängnisvolles Vorurteil. Eine Bevorzugung des Christoffelschen Symbols rechtfertigt sich insbesondere wegen der Symmetrie bezüglich seiner beiden Indices kovarianten Charakters (hier ν und σ) und deswegen, weil dasselbe in den fundamental wichtigen Gleichungen der geodätischen Linie (23b) a. a. O. auftritt, welche, vom physikalischen Gesichtspunkte aus betrachtet, die Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in einem Gravitationsfelde sind. Gleichung (14) bildet ebenfalls kein Gegenargument, denn das erste Glied ihrer rechten Seite kann in die Form

$$\sum_{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} T_\tau^\nu$$

gebracht werden.

Wir bezeichnen daher im folgenden als Komponenten des Gravitationsfeldes die Größen

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{Bmatrix} = -\sum_\alpha g^{\sigma\alpha} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\sum_\alpha g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (15)$$

Bezeichnet T_σ^ν den Energietensor des gesamten »materiellen« Geschehens, so verschwindet K_σ; der Erhaltungssatz (14) nimmt dann die Form an

$$\sum_\alpha \frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} = -\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha T_\alpha^\beta. \qquad (14a)$$

Wir merken an, daß die Bewegungsgleichungen (23b) a. a. O. des materiellen Punktes im Schwerefelde die Form annehmen

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\tau \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \qquad (15)$$

2. An den Betrachtungen der Paragraphen 10 und 11 der zitierten Abhandlung ändert sich nichts, nur haben nun die dort als V-Skalare und V-Tensoren bezeichneten Gebilde den Charakter gewöhnlicher Skalare bzw. Tensoren.

§ 3. Die Feldgleichungen der Gravitation.

Nach dem bisher Gesagten liegt es nahe, die Feldgleichungen der Gravitation in der Form

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} \qquad (16)$$

anzusetzen, da wir bereits wissen, daß diese Gleichungen gegenüber beliebigen Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind. In der Tat genügen diese Gleichungen allen Bedingungen, die wir an sie zu stellen haben. Ausführlicher geschrieben lauten sie gemäß (13a) und (15)

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa T_{\mu\nu}. \qquad (16a)$$

Wir wollen nun zeigen, daß diese Feldgleichungen in die Hamiltonsche Form

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int\left(\mathfrak{L}-\varkappa\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)d\tau\right\} \\ &\mathfrak{L}=\sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\beta}_{\tau\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

gebracht werden können, wobei die $g^{\mu\nu}$ zu variieren, die $T_{\mu\nu}$ als Konstante zu behandeln sind. Es ist nämlich (17) gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}=-\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{18}$$

wobei $\mathfrak{L}$ als Funktion der $g^{\mu\nu}$ und $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ $(=g^{\mu\nu}_{\sigma})$ zu denken ist. Anderseits ergeben sich durch eine längere, aber ohne Schwierigkeiten durchzuführende Rechnung die Beziehungen

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}=-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{19}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{19a}$$

Diese ergeben zusammen mit (18) die Feldgleichungen (16a).

Nun läßt sich auch leicht zeigen, daß dem Prinzip von der Erhaltung der Energie und des Impulses Genüge geleistet wird. Multipliziert man (18) mit $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ und summiert man über die Indices μ und ν, so erhält man nach geläufiger Umformung

$$\sum_{\alpha\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_\sigma}=-\varkappa\sum_{\mu\nu}T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{\sigma}.$$

Anderseits ist nach (14) für den gesamten Energietensor der Materie

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial T^{\lambda}_{\sigma}}{\partial x_\lambda}=-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T^{\lambda}_{\sigma}+t^{\lambda}_{\sigma})=0, \tag{20}$$

wobei

$$t^{\lambda}_{\sigma}=\frac{1}{2\varkappa}\left(\mathfrak{L}\delta^{\lambda}_{\sigma}-\sum_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{\lambda}}\right) \tag{20a}$$

den »Energietensor« des Gravitationsfeldes bezeichnet, der übrigens nur linearen Transformationen gegenüber Tensorcharakter hat. Aus (20a) und (19a) erhält man nach einfacher Umformung

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \qquad (20b)$$

Endlich ist es noch von Interesse, zwei skalare Gleichungen abzuleiten, die aus den Feldgleichungen hervorgehen. Multiplizieren wir (16a) mit $g^{\mu\nu}$ und summieren wir über μ und ν, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\varkappa \sum_\sigma T_\sigma^\sigma . \qquad (21)$$

Multiplizieren wir anderseits (16a) mit $g^{\nu\lambda}$ und summieren über ν, so erhalten wir

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \sum_{\alpha\beta\nu} g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = -\varkappa T_\mu^\lambda ,$$

oder mit Rücksicht auf (20b)

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa\left(T_\mu^\lambda + t_\mu^\lambda\right) .$$

Hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (20) nach einfacher Umformung die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta\right] = 0 . \qquad (22)$$

Wir aber fordern etwas weitergehend:

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau}\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta = 0 , \qquad (22a)$$

so daß (21) übergeht in

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\beta}\right) = -\varkappa \sum_\sigma T_\sigma^\sigma \qquad (21a)$$

Aus Gleichung (21a) geht hervor, daß es unmöglich ist, das Koordinatensystem so zu wählen, daß $\sqrt{-g}$ gleich 1 wird; denn der Skalar des Energietensors kann nicht zu null gemacht werden.

Die Gleichung (22a) ist eine Beziehung, der die $g_{\mu\nu}$ allein unterworfen sind und die in einem neuen Koordinatensystem nicht mehr gelten würde, das durch eine unerlaubte Transformation aus dem ursprünglich benutzten Koordinatensystem hervorginge. Diese Gleichung sagt also aus, wie das Koordinatensystem der Mannigfaltigkeit angepaßt werden muß.